

استخدام طريقة المونت كارلو لحساب الجهد الكهربائي عند النقاط في الفضاء حول سلك مستقيم محدود الطول مشحون

بشحنة كهربائية منتظمة

عائشة حسن صوان , عبد الوهاب خليل الصلابي¹

قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة مصر
sallabiabduwahab@gmail.com

Publishing date: 9/1/2025

الملخص:

تم استخدام طريقة مونت كارلو لحساب الجهد الكهربائي في الفضاء المحيط بسلك موصل مستقيم محدود الطول مشحون بشحنة كهربائية منتظمة ذات توزيع مستمر لكثافة الشحنة الطولية، تم الحصول على نتائج دقيقة لقيم الجهد الكهربائي في الفراغ حول السلك الموصل وهذه النتائج في توافق تام مع نتائج الحسابات التي استخدمت الطرق التحليلية لتعيين الجهد الكهربائي عند نفس النقاط حول السلك الموصل، كما تم حساب الجهد الكهربائي عند نقاط منطبقة تماماً على السلك الموصل نفسه.

الكلمات المفتاحية: الجهد الكهربائي، كثافة شحنة طولية، طريقة مونت كارلو.

1. المقدمة

يعد حساب الجهد الكهربائي في الفضاء حول الموصلات المشحونة أحد أهم المسائل في الكتب المنهجية التي تدرس الالكتروديناميكا [1-2]، فالموصلات بأشكالها المختلفة ذات استعمالات كبيرة وواسعة في حياتنا اليومية، وإن حساب الجهد الكهربائي حول الموصلات المختلفة مسألة مهمة نالت اهتمام البحوث والدراسات ، فقد تم إيجاد الجهد الكهربائي لعدة أشكال منتظمة من الموصلات، كالأقراص والحلقات الموصلة [3-4] وكذلك الألواح الموصلة [5-6-7-8-9-10-11]، وعادة ما تم اعتبار أن توزيع الشحنة للموصلات هو توزيع مستمر ومنتظم [12]. فقد تم دراسة وحساب الجهد الكهربائي حول الأسلاك الموصلة المستقيمة بالطرق التحليلية، فهذه المسألة لها أهمية كبيرة في مختلف المجالات البحثية فقد تم إيجاد الجهد الكهربائي لكريستال أيوني في بعد واحد باعتباره سلك موصل ذو توزيع منتظم لكثافة شحنة طولية [13]، وفي المجالات الصناعية يعد حساب الجهد الكهربائي للأسلاك ذو أهمية كبيرة. قام [14] Cully et al بحساب الجهد الكهربائي لمركبة فضائية باعتبارها مكونة من جسم كروي وسلك موصل [14]. إن الطرق التحليلية لحساب الجهد الكهربائي للموصلات حتى الأشكال المنتظمة منها وفي بعد واحد كأسلاك عادة ما تكون عملية طويلة وتحتاج للكثير من التحليل المجهد كما وضح ذلك (Orion Ciftja) سنة (2018) [15] في بحثه حيث قام بإيجاد الجهد الكهربائي للنقاط في الفراغ حول سلك موصل مستقيم مشحون بشحنة كهربائية منتظمة بالاعتماد على اتجاهات مواضع نهايتي السلك، وكذلك قام نفس الباحث (Orion Ciftja) سنة (2020) [16] بحساب الجهد الكهربائي للنقاط في الفراغ حول سلك موصل مشحون بشحنة كهربائية منتظمة باستعمال دوال رياضية تعرف بدوال الخطأ و كما وضح في بحثه إلى صعوبة الحساب في بعض الحالات ومن هذه الحالات عدم إمكانية حساب الجهد الكهربائي عند نقاط منطبقة على السلك تماماً.

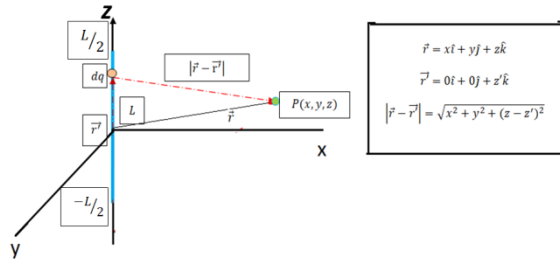
في هذا البحث سنستخدم طريقة تكامل مونت كارلو لحساب الجهد الكهربائي حول سلك مشحون بشحنة كهربائية منتظمة ومقارنة النتائج مع نتائج حسابات الدراساتين السابقين، وكذلك حساب الجهد الكهربائي عند النقاط المنطبقة على السلك الموصل.

2- الجانب النظري لحساب الجهد وفق قانون كولوم

سيتم في هذا البحث تعيين الجهد الكهربائي للنقاط في الفراغ حول سلك موصل طوله $L = \frac{L}{2} - (-\frac{L}{2})$ مشحون بشحنة كهربائية منتظمة كثافتها الطولية λ ، وضع السلك الموصل على امتداد المحور Z ومركزه منطبق على نقطة أصل الأحداثيات الكارتيزية الموضحة بالشكل (1). تم حساب الجهد الكهربائي باستعمال قانون كولوم وفق المعادلة الآتية:

$$V(\vec{r}) = k_e \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\lambda(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' \quad (1)$$

حيث (k_e) ثابت كولوم، \vec{r} متجه موضع النقطة المراد حساب الجهد الكهربائي عندها من نقطة الأصل، \vec{r}' متجه موضع عنصر الشحنة dq من نقطة الأصل. جهد كولوم في الأحداثيات الكارتيزية الناتج عن سلك موصل مشحون بشحنة منتظمة نهايتاه عند النقطتين $-0.5, 0.5$ يعطى بالعلاقة رقم (2).



الشكل (1): سلك موصل مستقيم محدود الطول طوله $L = 2l$ موضوع على امتداد المحور Z بحيث تكون نقطتي نهايتي السلك عند $-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}$ السلك مشحون بشحنة كهربائية منتظمة كثافتها الطولية λ ، بحيث يكون متجه الموضوع لعنصر الشحنة dq من نقطة الأصل \vec{r}' ونريد حساب الجهد الكهربائي $V(x, y, z)$ عند النقطة في الفضاء $p(x, y, z)$ معرفة بمتجه موضع \vec{r} من نقطة أصل الأحداثيات.

$$V(x,y,z)=k_e\lambda \int_{-0.5}^{0.5} \frac{dz'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}} \quad (2)$$

حيث z' متجه موضع عنصر كثافة الشحنة الكهربائية الطولية λ على امتداد المحور Z . ويمكن صياغة المعادلة (2) بحيث تكون بدون أبعاد بحساب الجهد الكهربائي لوحدة $k_e\lambda$ ، مع ملاحظة أن متجهات المواضع للنقاط في الفراغ وعناصر الشحنة بدون أبعاد أيضاً.

$$\frac{V(x,y,z)}{k_e\lambda} = \int_{-0.5}^{0.5} \frac{dz'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}}$$

$$\frac{V(x,y,z)}{k_e\lambda} = \int_{-0.5}^0 \frac{dz'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}} + \int_0^{0.5} \frac{dz'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}} \quad (3)$$

بتحويل المعادلة (3) لصيغة تكامل مونت كارلو كالتالي:

$$\frac{V(x,y,z)}{k_e\lambda} = \frac{(0 - (-0.5))}{N} \sum_{i=1}^N f(-z'_i) + \frac{(0.5 - 0)}{N} \sum_{i=1}^N f(z'_i)$$

$$\frac{V(x,y,z)}{k_e\lambda} = \frac{(0.5)}{N} \sum_{i=1}^N (f(-z'_i) + f(z'_i)) \quad (4)$$

2. الطريقة المستخدمة

تم استخدام طريقة تكامل مونت كارلو بكتابة برنامج بلغة برمجة فورتران 90.

1. تم إدخال عدد من المتغيرات العشوائية الموجبة داخل الفترة $[0,0.5]$ للمتغير z'_i ، ومتغيرات عشوائية سالبة داخل الفترة $[-0.5,0]$ للمتغير $-z'_i$.
2. نحدد عدد ألف عدد عشوائي للمتغير $|z'_i|$ ثم إيجاد الجهد الكهربائي عند نقطة معينة (x, y, z) .
3. نكرر عملية الحساب لإيجاد الجهد الكهربائي لنفس النقطة وذلك بزيادة عدد الأعداد العشوائية بألف عدد عشوائي في كل مرة، حتى نصل في المرة الأخيرة لعدد مليون عدد عشوائي وذلك حتى نتأكد ونعترف كم يلزم من الدورات الضرورية للحصول على قيم مناسبة.
4. نحسب متوسط الجهد الكهربائي الناتج لنفس النقطة بدأ من الدورة ذات (200000) عدد عشوائي، حيث نلاحظ من الشكل (2) أن قيمة الجهد الكهربائي تستقر بعد هذه الدورة.
5. تتم عملية حساب الجهد الكهربائي للنقاط المحددة في الفراغ حول السلك الموصل $V(x = -2..2, y = -2..2, z = 0..2)$.

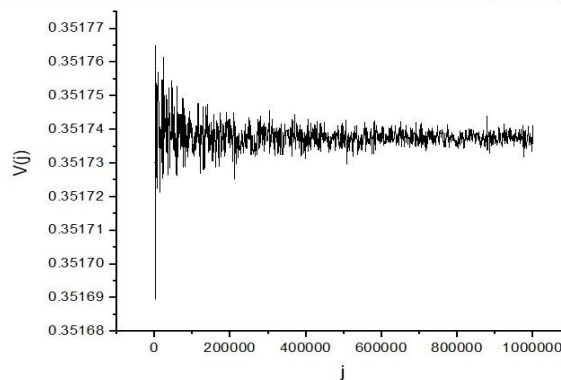
3. النتائج والحسابات

نتائج حساب الجهد الكهربائي عند نقاط في الفراغ حول سلك موضوع على امتداد المحور Z باستخدام طريقة تكامل مونت كارلو تم وضعها في الجدول رقم (1). نتائجا هذه اظهرت توافق كبير مع النتائج المنشورة في المرجعين [15][16] و الدراسة المنشورة بالمرجع [8]. هذا التوافق بين نتائج الطرق التحليلية وطريقة تكامل مونت كارلو يبين أهمية استخدام طريقة تكامل مونت كارلو والتي تتميز بسهولة التطبيق و لا تحتاج الى اجراء اي تقريبات او ملائمة كبيرة. في الدراسات [15][16] و الدراسة المنشورة بالمرجع [8] لم يتم حساب حساب قيم الجهد الكهربائي عند نقاط منطبقة تماماً على السلك الموصل عند النقاط المحددة $-0.5..0.5$, $x=y=0$ باستخدام الطرق التحليلية ذلك لصعوبة اجراء التكامل للنقاط المنطبقة على السلك تماماً. و حيث ان طريقة مونت كارلو اظهرت توافق كبير مع النتائج المنشورة فقد استخدمنا طريقة مونت كارلو ايضاً في حساب قيم الجهد الكهربائي عند نقاط منطبقة تماماً على السلك الموصل (عند النقاط المحددة $(-0.5..0.5)$ $V(x = y = 0, z = -0.5..0.5)$. هذه القيم تم ادراجها في الجدول رقم (1).

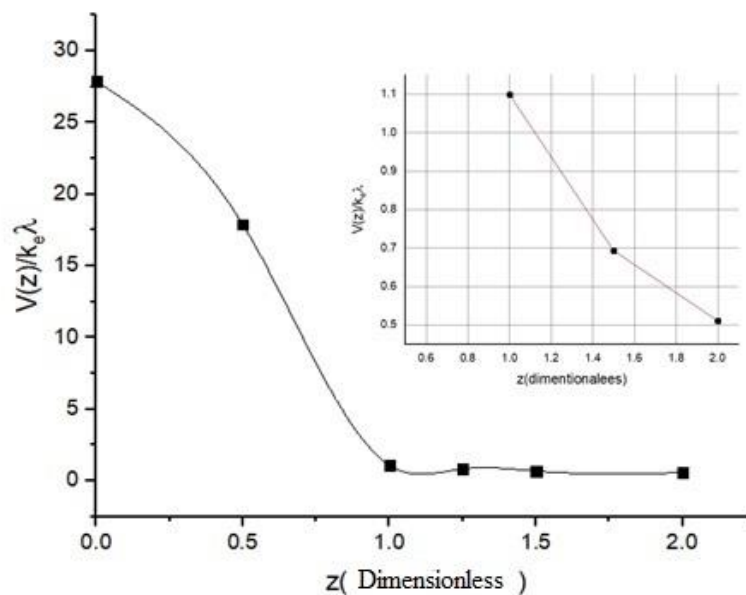
الجدول(1): قيم الجهد الكهربائي للنقاط في الفراغ حول سلك موصل مستقيم محدود الطول مشحون بشحنة كهربائية منتظمة باستعمال مونت كارلو مقارنة م نتائج الدراساتين السابقين [15-16].

x	y	z	V(x,y,z)[15]	V(x,y,z)[16]	تكامـل مونت كارلو V(x,y,z)
±2	±2	2	0.2886654730	0.2886654733	0.2886654661
±2	±2	1.5	0.3119053583	0.3119053581	0.31190511425
±2	±2	1	0.3323053536	0.3323053533	0.3323047895
±2	±2	0.5	0.3465735900	0.3465735903	0.3465727255
±2	±2	0	0.3517373898	0.3517373900	0.3517374237
±2	±1.5	2	0.3125486884	0.3125486883	0.3125487959
±2	±1.5	1.5	0.3426329362	0.3426329362	0.3426327338

± 1	0	0	0.9624236498	0.9624236502	0.9624244399
± 0.5	± 0.5	2	0.3489279032	0.478825422	0.4788295175
± 0.5	± 0.5	1.5	0.6165313392	0.616531339	0.6165387682
± 0.5	± 0.5	1	0.8381324744	0.8381324745	0.8381441751
± 0.5	± 0.5	0.5	1.146215835	1.146215835	1.1462096667
± 0.5	± 0.5	0	1.316957897	1.316957897	1.3169601202
± 0.5	0	2	0.4939918822	0.493991882	0.4939968169
± 0.5	0	1.5	0.6510770721	0.651077072	0.6510874046
± 0.5	0	1	0.9370728722	0.9370728720	0.9370964382
± 0.5	0	0.5	1.443635475	1.443635475	1.4436464283
± 0.5	0	0	1.762747175	1.762747174	1.7627532204
0	0	2	0.5108256240	Float(undefined)	0.510831630
0	0	1.5	0.6931471806	Float(undefined)	0.693162001
0	0	1	1.098612289	Float(undefined)	1.098668804
0	0	0.5	Float(∞)	Float(undefined)	17.87501484
0	0	0	Float(∞)	Float(∞)	27.86606860



الشكل (2): قيمة الجهد الكهربائي لنقطة واحدة $V(2,2,0)$ كدالة في عدد الدورات j ، حيث تبدأ الدورة الأولى من $j = 1000$ والأخيرة تنتهي عند $j = 1000000$ ، يتم حساب المتوسط لقيمة الجهد الكهربائي للنقطة بعد الدورة $j = 200000$ ، حيث نلاحظ أن القيمة تستقر بداية منها.



الشكل (2): الجهد الكهربائي باستخدام مونت كارلو عند النقاط حول وعلى سلك مستقيم موصل محدود الطول، نلاحظ أن القيمة العليا للجهد عند النقطة $V(0)$ ثم تقل قيمة الجهد بالابتعاد عن السلك، الشكل الداخلي يوضح قيم الجهد الكهربائي حول السلك $V(z)$ باستخدام مونت كارلو النقاط السوداء، والقيم المحسوبة من الدراسة السابقة [15] باللون الأحمر.

4. الخلاصة

في هذا البحث استخدمنا طريقة مونت كارلو لتعيين الجهد الكهربائي للنقاط في الفراغ حول سلك موصل محدود الطول مشحون بشحنة كهربائية منتظمة وتمت مقارنة النتائج بنتائج الحسابات للدراسات السابقة، وهذه النتائج متوافقة بشكل كبير، وكذلك تمكنا من حساب الجهد الكهربائي للنقاط المنطبقة على السلك نفسه، حيث أن الطرق التحليلية في الدراسات السابقة لم تتمكن من حساب الجهد الكهربائي عندهذه النقاط. كذلك يمكن تطوير هذا البحث ليشمل الأسلاك الموصلة المشحونة بشحنة كهربائية غير منتظمة، كذلك يمكن حساب الجهد للموصلات المنتظمة الشكل وغير منتظمة الشكل المشحونة بشحنة كهربائية منتظمة أو شحنة كهربائية غير منتظمة باستخدام تكامل مونت كارلو.

المراجع

- [1] Jackson, J. D. "Classical Electrodynamics", 2nd ed. (New York: Wiley) (1975).
- [2] Griffiths, D. J. "Introduction to Electrodynamics", 3rd ed Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, (1999),
- [3] Ciftja, O. and Hysi, I. (2011). The electrostatic potential of a uniformly charged disk as the source of novel mathematical identities. Applied mathematics letters, 24(11), 1919-1923.
- [4] Ciftja, O., Babineaux, A. and Hafeez, N. (2009). The electrostatic potential of a uniformly charged ring. European journal of physics, 30(3), 623.
- [5] Ciftja, O. (2020). Electrostatic potential of a uniformly charged square plate at an arbitrary point in space. Physica Scripta, 95(9), 095802.
- [6] Ciftja, O. (2013). Calculation of the Coulomb electrostatic potential created by a uniformly charged square on its plane: exact mathematical formulas. Journal of Electrostatics, 71, 102-108. (26)
- [7] Ciftja, O. and Ciftja, B. (2020). Results for the electrostatic potential of a uniformly charged square plate. Results in Physics, 19, 103671. (27)
- [8] Ciftja, O. and Ciftja, B. (2023). Exact analytical results for the electrostatic potential due to a uniformly charged finite rectangular plate. Canadian Journal of Physics, 101(11), 607-612. (28)
- [9] Ciftja, O. (2015). Concise presentation of the Coulomb electrostatic potential of a uniformly charged cube. Journal of Electrostatics, 76, 127-137. (29)
- [10] Aghamohammadi, A. (2011). Dimensional analysis and electric potential due to a uniformly charged sheet. European journal of physics, 32(3), 633.(47)
- [11] Fagundes, D. A. (2021). Electrostatic potential of a rectangular uniformly charged plate: exact solution and limiting cases. European Journal of Physics, 43(1), 015203.(49)
- [12] Palma, G., Oyarzún, R. and Raff, U. (2003). Generalization of the electrostatic potential function for an infinite charge distribution. American Journal of Physics, 71(8), 813-815.(51)
- [13] Ciftja, O. (2019). Equivalence of an infinite one-dimensional ionic crystal to a simple electrostatic model. Results in Physics, 13, 102325. (43)
- [14] Cully, C. M., Ergun, R. E. and Eriksson, A. I. (2007). Electrostatic structure around spacecraft in tenuous plasmas. Journal of Geophysical Research: Space Physics, 112(A9). (52)
- [15] Ciftja, O., Beharie, K. and Beharie, T. (2018). Geometrical interpretation of the electrostatic potential created by a uniformly charged straight wire. European Journal of Physics, 40(1), 015501.(24)
- [16] Ciftja, O. and Ciftja, B. (2021). New solution method for the problem of a uniformly charged straight wire. European Journal of Physics, 42(2), 025203.