بعض أنواع الاتصال الضعيفة في الفضاءات المنتهية-T_0

مفيدة حميده[1]، نهى الجمل، رويدة العبيدي

قسم الرياضيات، كلية العلوم- جامعة مصراتة
mu.hmaida@sci.misuratau.edu.ly[1]

Publishing date: 9/1/2025

الملخص: تهدف هذه الورقة إلى دراسة بعض أنواع الاتصال في فضاء تبولوجي منتهي-T_0 كذلك توضيح العلاقة بين بعض المفاهيم كالدوال المفتوحة والمفتوحة مبدئيا ونصف مفتوحة والمتصلة مبدئيا وغيرها.

الكلمات المفتاحية: فضاء الكسندروف، مجموعة شبه مفتوحة، دالة شبه مفتوحة، دوال شبه متصلة، فضاء تبولوجي منتهي.

المقدمة

ترتبط الدوال شبه المفتوحة (مفتوحة مبدئيا، نصف مفتوحة وغيرها) ارتباطا وثيقا بالدوال المفتوحة والدوال المتصلة، وغالبا ما تدرس في سياق فضاءات تبولوجية ذات خصائص معينة. ركزت الأبحاث على تصنيف الدوال شبه المفتوحة في بيئات تبولوجية متنوعة، وغالبا ما توفر شروطا تحتها تحافظ هذه الدوال على خصائص اتصال معينة. سعى الدراسات الحديثة إلى تعميم مفهومي شبه الانفتاح وشبه الاتصال على هياكل رياضية متنوعة، بما في ذلك الفضاءات المترية المعممة والتبولوجيا الضبابية، للمزيد من التفاصيل يمكن الاطلاع على الأبحاث [1، 2، 5، 6، 7، 15].

العلاقة $\mathcal{R}$ على المجموعة A تسمى علاقة ترتيب جزئي إذا حققت أنها عاكسة ومتماثلة تخالفياً ومتعدية. نرمز لعلاقة الترتيب الجزئي بالرمز $\leq$ بدلا من الرمز $\mathcal{R}$. يسمى الزوج $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً. للسهولة نكتب A مجموعة مرتبة جزئيا بدلاً من الزوج $(A,\leq)$. ذا كانت A مجموعة مرتبة جزئياً، العنصر $a\in A$ يسمى العنصر الأصغر للمجموعة A إذا كان $a\leq x$ لكل $x\in A$. العنصر $b\in A$ يسمى العنصر الأكبر للمجموعة A إذا كان $x\leq b$ لكل $x\in A$. العنصر $c\in A$ يسمى عنصر أصغري للمجموعة A إذا وفقط إذا كان لا يوجد عنصر $x\in A$ حيث إن $x<c$ و $x\neq c$. أي أنه إذا كان $x\in A$ بحيث إن $x\leq c$، فإن $x=c$. العنصر $d\in A$ يسمى عنصر أعظمي للمجموعة A إذا وفقط إذا كان لا يوجد عنصر $x\in A$ حيث إن $d<x$ و $x\neq d$. أي أنه إذا كان $x\in A$ بحيث إن $d\leq x$، فإن $x=d$. المجموعة العليا للعنصر $x\in A$ تعرف كالتالي $\uparrow x=\{y\in A: x\leq y\}$.

لتكن P مجموعة مرتبة جزئياً منتهية، سوف نرمز لمجموعة كل العناصر الأعظمية (الأصغرية) للمجموعة P بالرمز M $(\boldsymbol{m})$. وإذا كانت $A\subseteq P$، فإن $M(A)$ $(\boldsymbol{m}(A))$ هي مجموعة كل العناصر الأعظمية (الأصغرية) للمجموعة الجزئية A.

لتكن X مجموعة غير خالية، التبولوجي τ على X هو عائلة من المجموعات الجزئية من X تسمى مجموعات مفتوحة بحيث تحقق أن $\emptyset$ و X مفتوحة في τ، وتقاطع عدد منتهي من المجموعات المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة. واتحاد أي تجمع من المجموعات المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة.

المجموعة X مع التبولوجي τ تكون فضاء تبولوجي ويرمز له بالرمز (X,τ)، ولسهولة سوف نكتب X ونعني بها الفضاء التبولوجي (X,τ).

الفضاء التبولوجي X يكون فضاء-T_0 إذا كان لأي نقطتين مختلفتين x,y في X توجد مجموعة مفتوحة U تحتوي إحدى النقطتين ولا تحتوي الأخرى.

تعريف 1: [11] (المجموعات المفتوحة المعممة) لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي X عندئذٍ تسمى المجموعة A:

- مجموعة نصف مفتوحة (semi-open) إذا كان $A\subseteq\overline{A^o}$.
- مجموعة مفتوحة مبدئياً (preopen) إذا كان $A\subseteq(\bar{A})^o$.
- مجموعة مفتوحة-α (α-open) إذا كان $A\subseteq(\overline{A^o})^o$.
- مجموعة مفتوحة-b (b-open) إذا كانت $A\subseteq(\bar{A})^o\cup\overline{A^o}$. [4]
- الفضاء التبولوجي يسمى شديد عدم الترابط (extremely disconnected) إذا كانت غلاقة أي مجموعة مفتوحة تكون مفتوحة.

نلاحظ أن المجموعة المفتوحة تكون نصف مفتوحة ومفتوحة مبدئياً ومفتوحة-α ومفتوحة-b.

عائلة كل المجموعات نصف المفتوحة (مفتوحة مبدئياً، مفتوحة-α، مفتوحة-b) يرمز لها بالرمز $SO(X)$ ($PO(X)$، τ_α، $BO(X)$).

الفضاء التبولوجي المنتهي The finite topological space

لتكن X مجموعة منتهية بها عدد n من العناصر، فإن عدد المجموعات الجزئية (مجموعة القوى) من X يكون 2^n ونرمز لها بالرمز $\rho(X)$ وسوف نستخدم الرمز $|X|$ لعدد العناصر في X.

التبولوجي على مجموعة منتهية يكون $\tau \subseteq \rho(X)$ بالتالي فإنه يحتوي عدد منتهي من المجموعات المفتوحة لذلك يمكن إعادة كتابة شروط التبولوجي كالتالي:

1. $X, \emptyset \in \tau$.
2. إذا كان $A, B \in \tau$، فإن $A \cap B \in \tau$.
3. إذا كان $A, B \in \tau$، فإن $A \cup B \in \tau$.

الفضاء التبولوجي الذي يمتلك خاصية التقاطع الاختياري للمجموعات المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة يسمى فضاء ألكسندروف (Alexandroff space)، ويرمز له بالرمز فضاء-$\mathcal{A}$. الفضاء التبولوجي المنتهي هو فضاء تبولوجي على مجموعة منتهية من العناصر، يتميز بأنه لكل نقطة x في الفضاء التبولوجي X هناك أصغر مجموعة مفتوحة تحتوي هذه النقطة، تنتج هذه المجموعة من تقاطع كل المجموعات المفتوحة التي تحتوي هذه النقطة وتسمى أصغر مجموعة مفتوحة أساسية، ويرمز لها بالرمز U_x. هذا التقاطع يكون مجموعة مفتوحة، لأن الفضاء يحتوي عدد منتهي من المجموعات المفتوحة وهذا يعني أنه فضاء-$\mathcal{A}$. عائلة كل المجموعات المفتوحة $\mathfrak{U} = \{U_x : x \in X\}$ تكون قاعدة للفضاء التبولوجي المنتهي X وتكون وحيدة ومحتواه داخل أي قاعدة أخرى وتسمى بالقاعدة الصغرى للفضاء.

<u>تعريف 2: [10]</u> لتكن $\leq$ علاقة على X معرفة كالتالي:

$$x \leq y \text{ إذا وفقط إذا كان } y \in U_x \text{ أي أن } U_y \subseteq U_x.$$

هذه العلاقة تكون علاقة عاكسة ومتعدية.

العلاقة في التعريف (2) تكون علاقة ترتيب جزئي إذا وفقط إذا كان X فضاء منتهي- T_0 [13]. كذلك إذا كان X فضاء تبولوجي منتهي، و$U \subseteq X$ تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كان لكل $x \in U$ و $x \leq y$، فإن $y \in U$. والمجموعة $V \subseteq X$ تكون مغلقة إذا وفقط إذا كان لكل $x \in V$ وكان $y \leq x$، فإن $y \in V$. [6]

الفضاء المنتهي- T_0 يحتوي على الأقل مجموعة وحيدة العنصر تكون مفتوحة. أي أن مجموعة العناصر الأعظمية M غير خالية. أي مجموعة جزئية A من فضاء منتهي-T_0 تحتوي مجموعة وحيدة العنصر مفتوحة في الفضاء الجزئي A، أي أن مجموعة العناصر الأعظمية للمجموعة A غير خالية $M(A) \neq \emptyset$. [7]

<u>نتيجة 3:[8]، خاصية 10.2</u> كل مجموعة مفتوحة في فضاء منتهي-T_0 تحتوي مجموعة وحيدة العنصر مفتوحة في X.

<u>تعريف 4: [11]</u> ليكن X فضاء منتهي-T_0 و $x \in X$. مجموعة العناصر الأعظمية أكبر من أو تساوي x هي المجموعة $\hat{x} = \uparrow x \cap M$.

بعض خواص المجموعات المفتوحة المعممة

<u>مبرهنة 5: [9]، تمهيدية 2</u> لأي مجموعة جزئية A من أي فضاء تبولوجي (ليس من الضروري منتهي)، المجموعة $(\bar{A})^o \cap (\overline{A^o})^c$ لا تحتوي مجموعة وحيدة العنصر مفتوحة.

<u>مبرهنة 6:[2]</u> ليكن X فضاء منتهي-T_0 و $A \subseteq X$، فإن $(\bar{A})^o \subseteq \overline{A^o}$.

مثال 1: إذا كان $\tau = \{\emptyset, X, \{x\}, \{y, z\}\}$ ليس فضاء-T_0 و $A = \{x, z\}$، فإن $(\bar{A})^o = X$ و $\overline{A^o} = \{x\}$ بالتالي $(\bar{A})^o \nsubseteq \overline{A^o}$.

<u>نتيجة 7:[2]</u> ليكن X فضاء منتهي-T_0، من المبرهنة 6 الجمل التالية تكون صحيحة:

- أي مجموعة مفتوحة مبدئياً تكون نصف مفتوحة.
- المجموعة $A \subseteq X$ تكون نصف مفتوحة إذا وفقط إذا كانت مفتوحة-b.
- المجموعة $A \subseteq X$ تكون مفتوحة مبدئياً إذا وفقط إذا كانت مفتوحة-α.

الشكل 1 يوضح العلاقة بين المجموعات المفتوحة المعممة في الفضاء المنتهي-T_0.

مفتوحة $\Longleftarrow$ مفتوحة مبدئياً

$\Updownarrow$

مفتوحة-α $\Longleftarrow$ نصف مفتوحة

$\Updownarrow$

مفتوحة-b

شكل (**1**) العلاقة بين المجموعات المفتوحة المعممة في الفضاء المنتهي-T_0.

مثال 2: شرط فضاء-T_0 ضروري لتحقق النتائج السابقة. فمثلاً أي مجموعة جزئية فعلية غير خالية من الفضاء التبولوجي التافه $A \subseteq X$ يكون $\overline{A^o} = \emptyset$ و $(\bar{A})^o = X$، بالتالي تكون مفتوحة مبدئياً ولا تكون نصف مفتوحة، وأيضاً لا تكون مفتوحة-α.

مبرهنة 8: [11]، مبرهنة 3.5 ليكن X فضاء منتهي- T_0، فإن الجمل التالية تكون متكافئة:
1. الفضاء التبولوجي X يكون شديد عدم الترابط.
2. $PO(X) = SO(X)$.

نتيجة 9: [11] ليكن X فضاء تبولوجي منتهي-T_0 ولديه عنصر أكبر، فإن $PO(X) = SO(X)$ ولذلك X فضاء شديد عدم الترابط.

الاتصال في الفضاءات المنتهية The Continuity in Finite Spaces

مبرهنة 10: [8]، خاصية 1.6 ليكن X و Y فضاءات تبولوجية منتهية. الدالة $f: X \to Y$ تكون متصلة عند النقطة x إذا وفقط إذا كان $f(U_x) \subseteq U_{f(x)}$.

مبرهنة 11: [16]، خاصية 7 ليكن X و Y فضاءات تبولوجية منتهية. الدالة $f: X \to Y$ تكون متصلة إذا وفقط إذا كان $x \le x'$ يؤدي إلى أن $f(x) \le f(x')$ لكل $x, x' \in X$.

تعريف 12: [14] (بعض أنواع الاتصال الضعيفة) الدالة $f: X \to Y$ من الفضاء التبولوجي X إلي الفضاء التبولوجي Y تكون متصلة مبدئياً (نصف متصلة، متصلة-b، متصلة-α) إذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في Y تكون مفتوحة مبدئياً (نصف مفتوحة، مفتوحة-b ، مفتوحة-α) في X.

في الفضاء التبولوجي الاختياري (بصورة عامة) لا توجد علاقة بين الدوال المتصلة مبدئياً والدوال نصف المتصلة. عندما X فضاء منتهي-T_0 ، فإنه من العلاقة بين المجموعات المفتوحة المعممة الموضحة بالمخطط في شكل **(1)** نتحصل على العلاقات الموضحة في الشكل (2):

دالة متصلة $\Longleftarrow$ دالة متصلة مبدئياً

$\Updownarrow$

دالة نصف متصلة $\Longleftarrow$ دالة متصلة-α

$\Updownarrow$

دالة متصلة-b

شكل **(2)** العلاقة بين أنواع الاتصال الضعيفة في الفضاء المنتهي-T_0

مثال 3: ليكن $Y = X = \{x, y, z\}$ مع التبولوجيين

$$\tau^* = \{\emptyset, Y, \{x\}, \{x, y\}\} \text{ و } \tau = \{\emptyset, X, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$$

والدالة $f: (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau^*)$ معرفة كالتالي:

$f(x) = x, f(y) = z, f(z) = y$، فإن f دالة نصف متصلة ولا تكون متصلة مبدئياً.

مثال 4: ليكن $X = \{a, b, c, d\}$ مع التبولوجي $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ و $Y = \{x, y, z\}$ مع التبولوجي $\tau^* = \{\emptyset, Y, \{z\}\}$ والدالة $f: (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau^*)$ معرفة كالتالي:

$$f(a) = f(b) = f(d) = z, f(c) = x$$

فإن f دالة ليست متصلة ولكن متصلة مبدئياً.

مبرهنة 13: [12]، مبرهنة 7.4 ليكن X و Y فضاءات تبولوجية منتهية، و X فضاء-T_0. الدالة $f: X \to Y$ تكون متصلة مبدئياً إذا وفقط إذا كان لكل $x \in X$ يكون $f(\hat{x}) \subseteq U_{f(x)}$.

مبرهنة 14: [12]، مبرهنة 8.4 ليكن X و Y فضاءات تبولوجية منتهية، و X فضاء-T_0. الدالة $f: X \to Y$ تكون نصف متصلة إذا وفقط إذا كان لكل $x \in X$ هناك $y \in \hat{x}$ بحيث أن $f(y) \in U_{f(x)}$. أي أنه لكل $x \in X$ يكون $f(\hat{x}) \cap U_{f(x)} \neq \emptyset$.

نتيجة 15: ليكن X و Y فضاءات تبولوجية منتهية، و X فضاء-T_0. إذا كان X يحتوي عنصر أكبر L، فإن الدالة $f: X \to Y$ تكون متصلة مبدئياً إذا وفقط إذا كان لكل $x \in X$ يكون $f(L) \in U_{f(x)}$.

البرهان: نفرض f دالة متصلة مبدئياً، من المبرهنة **(13)** يكون $f(\hat{x}) \subseteq U_{f(x)}$ لكل $x \in X$، وبما أن L عنصر أكبر، بالتالي لكل $x \in X$ يكون $\hat{x} = \{L\}$، وهذا يعني أن $f(\hat{x}) = \{f(L)\}$ ومنها $f(L) \in U_{f(x)}$ لكل $x \in X$.
الاتجاه الأخر، نفرض $y \in f(\hat{x})$، ولكن $f(\hat{x}) = \{f(L)\} \in U_{f(x)}$، وبالتالي $y \in U_{f(x)}$، وهذا يعني أن $f(\hat{x}) \subseteq U_{f(x)}$ لكل $x \in X$ ومن المبرهنة **(13)** الدالة f تكون متصلة مبدئياً.

مبرهنة 16: ليكن X و Y فضاءات تبولوجية منتهية، و X فضاء-T_0 شديد عدم الترابط. الدالة $f: X \to Y$ تكون متصلة مبدئياً إذا وفقط إذا كانت نصف متصلة.

البرهان: من العلاقة بين المجموعات المفتوحة المعممة واضح أن الدالة المتصلة مبدئياً تكون نصف متصلة. الاتجاه الأخر، نفرض f نصف متصلة، و W مجموعة مفتوحة في Y، بما أن f نصف متصلة، فإن $f^{-1}(W)$ تكون نصف مفتوحة في X.بما أن X شديد عدم الترابط، بالتالي من المبرهنة **(8)** $f^{-1}(W)$ تكون مفتوحة مبدئياً وهذا يعني أن f متصلة مبدئياً.
في المثال 3 الفضاء X فضاء ليس شديد عدم الترابط، لأن $\overline{\{x\}} = \{x,z\} \notin \tau$، و الدالة نصف متصلة وليست متصلة مبدئياً.

مثال5: ليكن $Y = \{a,b\}\,, X = \{x,y,z\}$ مع التبولوجيين

$$\tau^* = \{\emptyset\,, Y, \{a\}\} \text{ و } \tau = \{\emptyset, X\,, \{x\}, \{x,y\}\}$$

والدالة $f\colon (X,\tau) \longrightarrow (Y,\tau^*)$ معرفة كالتالي: $f(x) = a\,, f(y) = b\,, f(z) = a$. الفضاء X شديد عدم الترابط و الدالة نصف متصلة ومتصلة مبدئياً.

ملاحظة: إذا كانت الدالة $f\colon X \to Y$ نصف متصلة ومتصلة مبدئياً ليس من الضروري أن يكون الفضاء X شديد عدم الترابط. الدالة في المثال 4 تكون متصلة مبدئياً ونصف متصلة و الفضاء X ليس شديد عدم الترابط، لأن $\overline{\{a\}} = \{a,c,d\} \notin \tau$.

<u>**نتيجة 17:**</u> ليكن X و Y فضاءات تبولوجية منتهية، و X فضاء-T_0 يحتوي عنصر أكبر L. بالتالي الجمل التالية متكافئة:
[1] $f\colon X \to Y$ دالة نصف متصلة.
[2] $f\colon X \to Y$ دالة متصلة مبدئياً.
[3] كان لكل $x \in X$ يكون $f(L) \in U_{f(x)}$.

البرهان: من النتيجتين **(9)** و**(15)**، والمبرهنة **(16)**.

<u>**مبرهنة 18:**</u> ليكن X و Y فضاءات تبولوجية منتهية. الدالة $f\colon X \to Y$ تكون متصلة ومفتوحة إذا وفقط إذا كان $f(U_x) = U_{f(x)}$ لكل $x \in X$.

البرهان: نفرض أن f دالة متصلة ومفتوحة، من المبرهنة **(10)** يكون لدينا $f(U_x) \subseteq U_{f(x)}$ لكل $x \in X$. المجموعة U_x مفتوحة لكل $x \in X$ وبما أن f دالة مفتوحة، فإن $f(U_x)$ مجموعة مفتوحة في Y. بما أن $f(x) \in f(U_x)$ وبالتالي $f(x) \in U_{f(x)} \subseteq f(U_x)$ وهذا يبرهن أن $f(U_x) = U_{f(x)}$ لكل $x \in X$. الاتجاه الأخر، نفرض أن $f(U_x) = U_{f(x)}$ لكل $x \in X$ ومن المبرهنة **(10)** تكون f دالة متصلة. بفرض V مجموعة مفتوحة في X بالتالي $\mathrm{V} = \bigcup_{x\in V} U_x$ ومنها $f(V) = f(\bigcup_{x\in V} U_x) = \bigcup_{x\in V} f(U_x) = \bigcup_{x\in V} U_{f(x)}$ وهذا يعني أن $f(V)$ مجموعة مفتوحة في Y وبالتالي f دالة مفتوحة.

<u>**تعريف 19: [8] (الدوال المفتوحة المعممة)**</u> الدالة $f\colon X \to Y$ من الفضاء التبولوجي X إلي الفضاء التبولوجي Y تكون مفتوحة مبدئياً (نصف مفتوحة، مفتوحة-b، مفتوحة-α) إذا كانت صورة كل مجموعة مفتوحة في X تكون مفتوحة مبدئياً (نصف مفتوحة، مفتوحة-b، مفتوحة-α) في Y.

من العلاقة بين المجموعات المفتوحة المعممة الموضحة بالمخطط في شكل **(1)** والتعريف **(19)** نجد العلاقة بين الدوال المفتوحة المعممة حيث أن Y فضاء منتهي-T_0 وهي موضحة في الشكل (3).

دالة مفتوحة $\Longleftarrow$ دالة مفتوحة مبدئياً

$\Updownarrow$

دالة مفتوحة-α $\Longleftarrow$ دالة نصف مفتوحة

$\Updownarrow$

دالة مفتوحة-b

شكل **(3)** العلاقة بين الدوال المفتوحة المعممة في الفضاء المنتهي-T_0

<u>**نتيجة 20:**</u> الدالة $f\colon X \to Y$ حيث Y فضاء منتهي-T_0 شديد عدم الترابط، فإنها تكون مفتوحة مبدئياً إذا وفقط إذا كانت نصف مفتوحة.

الخلاصة: بناءً على العلاقة بين المجموعات المفتوحة المعممة في الفضاء المنتهي-T_0 وجدنا العلاقة بين أنواع الاتصال الضعيفة والعلاقة بين الدوال المفتوحة المعممة. أوضحنا الشروط الكافية والضرورية لتكون الدالة بين الفضاءات المنتهية متصلة مبدئياً ونصف متصلة. أيضاً في حالة X و Y فضاءات منتهية، فإن الدالة تكون متصلة ومفتوحة إذا وفقط إذا كان صورة أصغر مجموعة مفتوحة أساسية للنقطة x تساوي أصغر مجموعة مفتوحة أساسية للنقطة $f(x)$.

المراجع

[1] رويدة العبيدي، مفيدة حميدة، نهى الجمل. العلاقة بين ارتفاع الفضاء التبولوجي المنتهي والاستقرائي الصغير. مجلة الساتل، العدد 37، 145-156، 2024.

[2] مفيدة حميدة، نهى الجمل. دراسة لبعض المجموعات القريبة من المجموعات المفتوحة. مجلة العلوم، العدد 15، 85-89، 2023.
[3] أحمد رمضان، طه العدوي. التبولوجي العام. قسم الرياضيات- كلية العلوم- جامعة الملك سعود، 2015.
[4] D. Andrijevic, On b-Open sets. Mat. Vesnik, V. 48, 59-64, 1996.
[5] R. Ali, A. AL-Ani, The Number of Regular Topologies on a Finite Set, URA-IJEAS, V. 1(2), 7-8, 2018.
[6] W. Asness. A Brief Overview of Alexandrov Spaces. corpus ID: 85504188, Notes for Research Experiences for Undergraduates (REU), 2018.
[7] J. Dontchev. Survey on Preopen Sets, the Proceedings of the yatsushiro Topological Conference, 1-18, 1998.
[8] A. EL-Atik, M. El-Monsef, E. Lashin. On Finite T_0 Topological Spaces. Proceeding of the Ninth Prague Topological Symposium, (Prague 2001),75-90, Topology Atlas, Toronto,2002.
[9] H. Herda and R. Metzler, Closure and Interior in Finite Topological Spaces, Colloquium Mathematicum 15, 211-216, 1966.
[10] R. Kreminski. Graphs and Matrices in the Study of Finite Topological Spaces، Missouri Journal of Mathematical Sciences,2, 96-121,2000.
[11] H. Mahdi and M. El-Atrash, On T_0-Alexandroff Spaces, the Islamic University Journal, V. 13 (2), 19-46, 2005.
[12] H. Mahdi, A. El-Mabhouh and N. Said, Dimension and Continuity on T_0-Amlexandroff Spaces, Islamic University of Gaza, 1131-1140, 2010.
[13] J. May. Finite Topological Spaces. Notes for Research Experiences for Undergraduates (REU), 2003.
[14] B. Nairat. On Some Properties of β-open Set, International Journal of Applied Engineering Research ISSN 0973-4562 V.13(6), 3670-3672, 2018.
[15] F. Sereti, G. Prinos and D. Georgiou. A Study of the Small Inductive Dimension in the Area of Finite Lattices. Order, 1-25,2023.
[16] R. Stong. Finite Topological Spaces. Trans. Am. Math. Soc. 123(2),325-340, 1966.