

استخدام الطريقة المعتمدة على جمع وطرح الأعداد الضبابية لحل المعادلات التفاضلية الضبابية الخطية من الرتبة n مع شروط ابتدائية

أمبارك الشاط^{1*} هند القاضي² عبد السلام عصمان بيت المال³
 أقسام الرياضيات، كلية الآداب والعلوم أوباري، جامعة سبها، ليبيا
^{3,2} قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة سبها، ليبيا

¹Amb.ashat@sebhau.edu.ly ²Hen.elgadi@sebhau.edu.ly ³abd.beitalmal@sebhau.edu.ly

Publishing date: 9/1/2025

المخلص: تقدم هذه الورقة حلاً عملياً لمشكلة حل المعادلات التفاضلية الخطية في وجود عدم الدقة. تعتمد الطريقة المقترحة (ASFM) على جمع وطرح الأعداد الضبابية لتحويل المعادلة الضبابية إلى معادلة يمكن حلها باستخدام الأساليب التقليدية. الدراسة تغطي ثلاث حالات مختلفة من المعاملات الضبابية، بناءً على إشارات معاملات المعادلة. تم توضيح الطريقة من خلال أمثلة عملية، مما يوسع نطاق تطبيقاتها. النتائج التجريبية تؤكد فعالية هذه الطريقة وقابليتها للتطبيق.

الكلمات المفتاحية: العدد الضبابي- المعادلات التفاضلية الضبابية- طريقة جمع وطرح الأعداد الضبابية - مشتقة هوكوهارا- مسألة القيمة الحدية الضبابية

(1) المقدمة

المعادلات التفاضلية تُعد أدوات أساسية في مجال الرياضيات التطبيقية، حيث تلعب دوراً مهماً في وصف الظواهر الطبيعية والهندسية. ومع ذلك، تواجه المعادلات التفاضلية التقليدية بعض القيود عند استخدامها في نمذجة الأنظمة الفعلية حيث يكون لدينا مُدخلات وبيانات غير دقيقة أو غير مؤكدة. لذلك، تبرز أهمية استخدام الأعداد الضبابية؛ حيث تُوفّر إطاراً مناسباً لمعالجة عنصر عدم التأكد. ظهرت المعادلات التفاضلية الضبابية لأول مرة في نهاية القرن العشرين، حيث بدأ الباحثون بالبحث عن أدوات رياضية تستطيع نمذجة الأنظمة المعقدة التي تتضمن عدم اليقين والغموض. في عام 1965، قام لطف الله زاده، عالم إيراني، بتقديم مفهوم نظرية المجموعات الضبابية [1, 2]، التي وفرت إطاراً رياضياً لتصور عدم اليقين بشكل منهجي. هذا الإنجاز سمح للعلماء بتوسيع نطاق المعادلات التفاضلية لتشمل الأنظمة التي يصعب وصفها باستخدام أرقام دقيقة.

تعد المعادلات التفاضلية الضبابية من المفاهيم الأساسية في الرياضيات والهندسة، حيث تتضمن هذه المعادلات وجود أعداد غير محددة أو غير معروفة، مما يستدعي فهماً دقيقاً لتحقيق النتائج المطلوبة. تهدف دراسة هذه المعادلات إلى فهم سلوك النظم الديناميكية التي تحتوي على عناصر من عدم اليقين، وتتطلب إماماً عميقاً بالرياضيات والتحليل للتعامل معها بفعالية. بالإضافة إلى ذلك، فإن المعادلات التفاضلية الضبابية تُعد مفهوماً معقداً يتطلب دراسة متأنية وقدرة عالية على التحليل الرياضي والفكر المنطقي لفهمها والعمل عليها بفعالية. هذا يستلزم سيقاً رياضياً متقدماً وقدرة على استيعاب المفاهيم الرياضية المعقدة وتحليلها بدقة، والتعامل معها ضمن نماذج رياضية متعددة تعزز فهمنا للظواهر والتفاعلات الواقعية في عالمنا.

بناءً على ذلك، يمكن اعتبار المعادلات التفاضلية الضبابية تحدياً رئيسياً في مجالي الرياضيات والهندسة، حيث يُعد فهمها والتعامل معها استثماراً مهماً لفهم وتحليل النظم الديناميكية بطرق موثوقة ودقيقة [3-5]. شهد مجال المعادلات التفاضلية الضبابية تطوراً ملحوظاً منذ طرحه لأول مرة. ففي عام 1975، وضع الباحث الأمريكي إي. ج. كوك حجر الأساس لهذا المجال بتقديم تعريف رسمي للمعادلات التفاضلية الضبابية. ومنذ ذلك الحين، ساهم العديد من الباحثين بشكل كبير في تطوير هذا الحقل، من أبرزهم د. ديد، س. يانج، ه. ل. فانغ، ك. تشونغ، و. ر. ديمانتشيلو الذين قدموا إسهامات قيمة في فهم وتطوير حلول هذه المعادلة [2]. ولم تتوقف الأبحاث عند هذا الحد، بل توسعت لتشمل طرق حل متنوعة. فقد قدم غازيلايف وزملاؤه طريقة مبتكرة لحل أنظمة المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الحقيقية، مستخدمين الأعداد الضبابية لتمثيل الحلول الأولية [6]. كما ابتكر باكلي وفورينغ طريقتين تحليليتين لحل المعادلات الخطية من الرتبة الأولى والثانية، حيث اعتمدت الطريقة الأولى على تحويل الحل إلى شكل ضبابي ثم التحقق من صحته، بينما عكست الطريقة الثانية هذه العملية [7]. ولم تقتصر الأبحاث على هذه الرتبة، فقد قدم توفيق الله ويردانلو وزملاؤه طريقة تحليلية لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة النونية مع شروط ابتدائية ضبابية [8]. كما استخدمت رشا إبراهيم طريقة التحول التفاضلي لحل كل من المعادلات الضبابية الخطية وغير خطية، مما يوسع نطاق تطبيقات هذه الطرق [9]. تنقسم هذه الورقة إلى ستة أقسام رئيسية. يقدم القسم الثاني المفاهيم الأساسية التي سيتم البناء عليها في الأجزاء اللاحقة. يخصص القسم الثالث لعرض المعادلات التفاضلية الضبابية من الرتبة n ، بينما يتناول القسم الرابع بالتفصيل طريقة جديدة لحل هذه المعادلات تعتمد على عمليات الجمع والطرح للأعداد الضبابية. يتم توضيح هذه الطريقة من خلال أمثلة تطبيقية متنوعة في القسم نفسه. وفي القسم الخامس، يتم استخلاص النتائج وتحليلها، لتختتم الورقة بتقديم مجموعة من التوصيات للمزيد من البحث في هذا المجال.

(2) مفاهيم أساسية

تعريف 1: الفترة Interval [10, 11]

الفترة \tilde{x} المعرفة بـ $[\underline{x}, \bar{x}]$ على مجموعة الأعداد الحقيقية تعطى بـ

$$\tilde{x} = [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in R: \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$$

في هذا البحث، سوف نتناول فقط الفترات المغلقة.

إذا أخذنا في الاعتبار الفترتين $\tilde{x} = [\underline{x}, \bar{x}]$ ، $\tilde{y} = [\underline{y}, \bar{y}]$ فإن الفترتين متساويتان إذا كانتا تنتميان إلى نفس المجموعة. رياضياً، هذا يحدث فقط عندما تكون نقاط النهاية متساوية، وبالتالي يمكن أن نكتب:

$$\tilde{x} = \tilde{y} \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y}, \bar{x} = \bar{y}$$

بالنسبة للفترتين $\tilde{x} = [\underline{x}, \bar{x}]$ ، $\tilde{y} = [\underline{y}, \bar{y}]$ يتم تعريف العمليات الحسابية على الفترات مثل الجمع والطرح والضرب والقسمة كالتالي:

$$\begin{aligned} \tilde{x} + \tilde{y} &= [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}] \\ \tilde{x} - \tilde{y} &= [\underline{x} - \underline{y}, \bar{x} - \bar{y}] \\ \tilde{x} \times \tilde{y} &= [\min S, \max S], \quad S \\ &= \{\underline{x} \times \underline{y}, \underline{x} \times \bar{y}, \bar{x} \times \underline{y}, \bar{x} \times \bar{y}\}, \end{aligned}$$

$$\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}} = [\underline{x}, \bar{x}] \times \left[\frac{1}{\tilde{y}}, \frac{1}{\underline{y}} \right] \text{ if } 0 \notin \tilde{y}$$

الآن إذا كان K عدداً حقيقياً و $\tilde{x} = [\underline{x}, \bar{x}]$ فإن حاصل ضربهما يعطى ب

$$k\tilde{x} = \begin{cases} [k\bar{x}, k\underline{x}], & K < 0 \\ [k\underline{x}, k\bar{x}], & K \geq 0 \end{cases}$$

تعريف 2: درجة الانتماء [11]

تعتبر درجة ودالة الانتماء من أهم العناصر وحجر الزاوية في الرياضيات الضبابية والمكون الجديد الذي أضيف للعناصر والمجموعات التقليدية، والتي من أجلها أخذ هذا النوع من العلوم استقلالته. يرتكز هذا المفهوم على عدم وجود انتماء تام لعنصر في مجموعة فقط، بل هناك انتماء جزئي لعنصر ما في هذه المجموعة. إن درجة انتماء عنصر تحدد مدى قربته من العناصر ذات الانتماء التام، وتحدد هذه الدرجة بين (الصفر والواحد). فإذا كانت درجة انتماء العنصر (صفر) معنى ذلك أن هذا العنصر بعيد كل البعد عن العناصر ذات الانتماء التام والتي درجتها (الواحد)، وكلما كانت درجة الانتماء قريبة من الواحد كان قرب العنصر من العناصر ذات الانتماء التام كبيراً.

تعريف 3: دالة الانتماء [11] Membership Function

تعرف دالة الانتماء والتي يرمز لها بالرمز μ_A بأنها دالة عددية تأخذ قيمتها في الفترة $[0,1]$ ، حيث يتم بواسطتها حساب درجة انتماء عنصر ما للمجموعة الضبابية. فإذا كانت X مجموعة غير خالية و A مجموعة جزئية منها ولتكن $I = [0,1]$ فتعرف دالة الانتماء $\mu_A: X \rightarrow I$ حيث تربط لكل عنصر $x \in X$ بالعدد الحقيقي $\mu_A(x)$.

تعريف 4: العدد الضبابي [11, 9] Fuzzy Number

العدد الضبابي \tilde{U} هو مجموعة ضبابية محدبة \tilde{U} من خط الأعداد الحقيقية \mathbb{R} بحيث:

$$\{\mu_{\tilde{U}}(x): \mathbb{R} \rightarrow [0,1], \forall x \in \mathbb{R}\},$$

بحيث $\mu_{\tilde{U}}$ تسمى دالة الانتماء للمجموعة الضبابية، وهي مستمرة جزئياً.

وهناك مجموعة متنوعة من الأعداد الضبابية. ولكن في هذه الدراسة سنركز على الأعداد الضبابية المثلثية والشبه منحرفة والجوسية.

تعريف 5: العدد الضبابي المثلثي [12, 6] Triangular Fuzzy Number

العدد الضبابي المثلثي \tilde{U} (TFN) هو مجموعة ضبابية محدبة \tilde{U} من خط الأعداد الحقيقية \mathbb{R} بحيث:

$$1. \text{ يوجد تحديداً عنصراً واحداً } x_0 \in \mathbb{R} \text{ مع } \mu_{\tilde{U}}(x_0) = 1$$

(x_0 تسمى القيمة المتوسطة من \tilde{U}) حيث $\mu_{\tilde{U}}$ دالة الانتماء للمجموعة الضبابية.

$$2. \mu_{\tilde{U}}(x) \text{ متصلة جزئياً.}$$

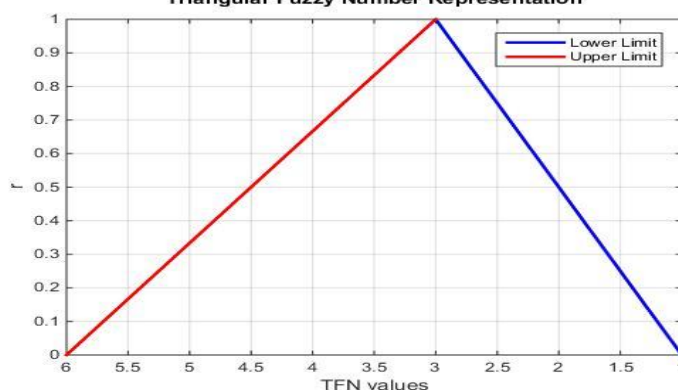
لنعتبر العدد الضبابي المثلثي $\tilde{U} = (a, b, c)$ (TFN) . \tilde{U} دالة الانتماء $\mu_{\tilde{U}}$ تعرف كالتالي:

$$\mu_{\tilde{U}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & x \geq c \end{cases}$$

العدد الضبابي المثلثي $\tilde{U} = (a, b, c)$ (TFN) يمكن تمثيله بأزواج مرتبة من الدوال من خلال:

$$r\text{-approach: } [\underline{u}(r), \bar{u}(r)] = [(b-a)r + a, -(c-b)r + c], : r \in [0,1]$$

Triangular Fuzzy Number Representation



شكل 1: يبين العدد الضبابي المثلثي

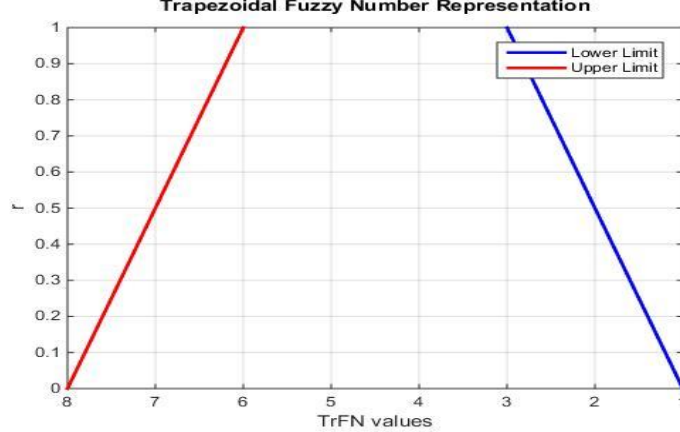
تعريف 6: العدد الضبابي شبه المنحرف [6, 12] Trapezoidal Fuzzy Number

لنعتبر العدد الضبابي شبه المنحرف $\tilde{U} = (a, b, c, d)$ (TrFN).

دالة الانتماء $\mu_{\tilde{U}}$ تعرف كالتالي:

$$\mu_{\bar{U}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & x \geq d \end{cases}$$

العدد الضبابي شبه المنحرف $\bar{U} = (a, b, c, d)$ (TrFN) يمكن تمثيله بأزواج مرتبة من الدوال من خلال:
 r - cut approach: $[\underline{u}(r), \bar{u}(r)] = [(b-a)r + a, -(d-c)r + d], : r \in [0,1]$



شكل 2: يبين العدد الضبابي شبه المنحرف

تعريف 7: العدد الضبابي الجاوسي Gaussian Fuzzy Number [10, 8]

لنعتبر العدد الضبابي الجاوسي (GFN) $\bar{U} = (\delta, \sigma_l, \sigma_r)$. دالة الانتماء $\mu_{\bar{U}}$ تعرف كالتالي:

$$\mu_{\bar{U}}(x) = \begin{cases} \exp[-(x-\delta)^2/2\sigma_l^2] & \text{for } x \leq \delta \\ \exp[-(x-\delta)^2/2\sigma_r^2] & \text{for } x \geq \delta \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

عندما قيمة النموذج تعطى بـ δ و σ_l و σ_r يشير إلى الطرف الأيمن والأيسر الضبابي المقابل لتوزيع جاوس. بالنسبة للعدد الضبابي الجاوسي المتمثل فإن الطرف الأيمن والأيسر متساويان، أي أن $\sigma_l = \sigma_r = \sigma$

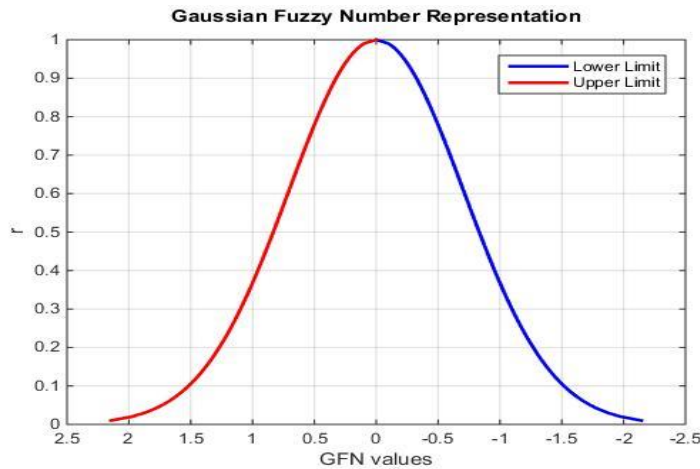
لذلك يمكن كتابة (GFN) العدد الضبابي الجاوسي المتمثل بالشكل $\bar{U} = (\delta, \sigma_l, \sigma_r)$ ودالة الانتماء المقابلة تعرف كالتالي:

$$\mu_{\bar{U}}(x) = \exp\{-\beta(x-\delta)^2\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

عندما $\lambda = 1/2\sigma^2$

يمكن تمثيل (GFN) المتمثل في الصورة البارامترية على النحو التالي:

$$\bar{U} = [\underline{u}(r), \bar{u}(r)] = \left[\delta - \sqrt{-\frac{(\log_e r)}{\lambda}}, \delta + \sqrt{-\frac{(\log_e r)}{\lambda}} \right], : r \in [0,1]$$



شكل 3: يبين العدد الضبابي الجاوسي

تم عرض التمثيل البياني للأشكال الضبابية المثلثية وشبه المنحرف والجاوسية، الحدود العليا والدنيا لهذه الأعداد الضبابية تلبى المتطلبات التالية:

1. $u(r)$ هي دالة غير متناقصة ومحدودة من اليسار بـ $[0,1]$.
2. $\bar{u}(r)$ هي دالة غير متزايدة ومحدودة من اليمين بـ $[0,1]$.
3. $\underline{u}(r) \leq \bar{u}(r), 0 \leq x \leq 1$

تعريف 8: المركز الضبابي Fuzzy Centre

المركز الضبابي للعدد العشوائي $\tilde{u} = [\underline{u}(r), \bar{u}(r)]$ كالتالي :

$$\tilde{u}^c = \frac{\underline{u}(r) + \bar{u}(r)}{2} \text{ for all } 0 \leq r \leq 1$$

تعريف 9: نصف القطر الضبابي Fuzzy Radius

نصف القطر الضبابي للعدد العشوائي $\tilde{u} = [\underline{u}(r), \bar{u}(r)]$ كالتالي :

$$\Delta \tilde{u} = \frac{\bar{u}(r) - \underline{u}(r)}{2} \text{ for all } 0 \leq r \leq 1$$

تعريف 10: مشتقة هوكهارا Hukuhara Derivative

ليكن لدينا الدالة $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_F$ و $X \cdot t_0 = (a, b)$ قابلة للتفاضل في t_0 ، إذا كان هناك $F'(t_0) \in \mathbb{R}_F$ بحيث:

1. لكل $h > 0$ قريبة جداً من الصفر (فرق هوكهارا)

$F(t_0 + h)\theta F(t_0 - h)$ و $F(t_0)\theta F(t_0 - h)$ موجود (في مجال تعريفها)

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0 + h)\theta F(t_0) - F(t_0)\theta F(t_0 - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0)\theta F(t_0 - h) - F(t_0)\theta F(t_0)}{-h} = F'(t_0)$$

أو

2. لكل $h > 0$ قريبة جداً من الصفر (فرق هوكهارا)

$F(t_0)\theta(t_0 + h)$ و $F(t_0 - h)\theta F(t_0)$ موجود (في مجال تعريفها)

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0)\theta F(t_0 + h) - F(t_0 - h)\theta F(t_0)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0 - h)\theta F(t_0) - F(t_0)\theta F(t_0)}{-h} = F'(t_0)$$

نظرية 1: [10]

لتكن لدينا $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_F$ ، و $[F(a; b)] = [\underline{f}(a; b), \bar{f}(a; b)]$ لكل $r \in [0,1]$:

1. إذا كانت F قابلة للتفاضل من النوع الأول (I)، فإن $\underline{f}(a; b)$ و $\bar{f}(a; b)$ تكون دوال قابلة للتفاضل ولدينا:

$$[F'(a; b)] = [\underline{f}'(a; b), \bar{f}'(a; b)]$$

2. إذا كانت F قابلة للتفاضل من النوع الثاني (II)، فإن $\underline{f}(a; b)$ و $\bar{f}(a; b)$ تكون دوال قابلة للتفاضل ولدينا:

$$[F'(a; b)] = [\bar{f}'(a; b), \underline{f}'(a; b)]$$

تعريف 11: مسألة القيمة الابتدائية الضبابية [11, 7] Fuzzy Initial Value Problem

لنعتبر مسألة القيمة الابتدائية من الرتبة الأولى (FIVP).

حيث $\tilde{x}'(t) = \tilde{f}(x, t)$ دالة ضبابية في t ، $\tilde{f}(x, t)$ دالة ضبابية في المتغير t والمتغيرات الضبابية \tilde{x} ، \tilde{x}' هي تفاضلات هوكهارا الضبابية في \tilde{x} .

إذا كانت الشروط الابتدائية تعطى بـ $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$ فإن (FIVP) مسألة القيمة الابتدائية تكتب على الصورة:

$$\tilde{x}'(t) = \tilde{f}(x, t), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

الخاضعة للشرط الابتدائي $\tilde{x}'(t_0) = \tilde{x}_0$ ، حيث T أقصى قيمة للزمن.

تعريف 12: مسألة القيمة الحدية الضبابية [13, 7] Fuzzy Boundary Value Problem

تكتب مسألة القيمة الحدية الضبابية (FBVP) من الرتبة n بالشكل:

$$\tilde{y}^{(n)}(t; r) + a_{n-1}(t)\tilde{y}^{(n-1)}(t; r) + \dots + a_1(t)\tilde{y}'(t; r) + a_0(t)\tilde{y}(t; r) = \tilde{g}(t; r), \quad (9)$$

حيث $a_i(t), 0 \leq i \leq n-1$ مستمرة في الفترة I . مع مراعاة الشروط الحدودية الضبابية

$$\tilde{y}(a; r) = [\underline{\beta}(r), \bar{\beta}(r)], \tilde{y}(b; r) = [\underline{\gamma}(r), \bar{\gamma}(r)]$$

و $\tilde{y}(t, r)$ هو الحل الذي سيتم تحديده.

مبرهنة 1: [14, 11]

إذا كانت $\tilde{u}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ دالة ذات قيمة ثلاثية ضبابية وإذا كانت \tilde{u} قابلة لتفاضل هوكهارا فإن $\tilde{u}' = (x', y', z')$

باستخدام تفاضل هوكهارا نوجد حل مسألة القيمة الابتدائية الضبابية

$$\tilde{x}'(t) = \tilde{f}(x, t) \quad (10)$$

الخاضعة للشرط الابتدائي الضبابي $\tilde{x}'(t_0) = \tilde{x}_0$.

بحيث $\tilde{x}_0 = (x_0, x_0^c, \bar{x}_0) \in \mathbb{R}$ ، $\tilde{x}(t) = (u, u^c, \bar{u}) \in \mathbb{R}$ و

$$f: [t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t, (u, u^c, \bar{u})) \\ = (f(t, u, u^c, \bar{u}), f^c(t, u, u^c, \bar{u}), \bar{f}(t, u, u^c, \bar{u}))$$

يمكننا تحويلها إلى نظام من المعادلات التفاضلية العادية التالية:

$$\begin{cases} \underline{u} = \underline{f}(t, \underline{u}, u^c, \bar{u}) \\ u^c = f^c(t, \underline{u}, u^c, \bar{u}) \\ \bar{u} = \bar{f}(t, \underline{u}, u^c, \bar{u}) \\ \underline{u}(0) = \underline{x}_0, u^c(0) = x_0^c, \bar{u}(0) = \bar{x}_0 \end{cases}$$

(3) المعادلات التفاضلية الضبابية من الرتبة n [11, 10, 8, 6].

نعتبر المعادلات التفاضلية الضبابية من الرتبة n في الصورة العامة كالتالي:

$$\tilde{y}^{(n)}(t; r) + a_{n-1}(t)\tilde{y}^{(n-1)}(t; r) + \dots + a_1(t)\tilde{y}'(t; r) + a_0(t)\tilde{y}(t; r) = \tilde{g}(t; r), \quad (1)$$

حيث $a_i(t), 0 \leq i \leq n-1$ مستمرة في الفترة على فترة ما ومحدودة بالشروط الابتدائية الضبابية

$$\tilde{y}(0) = \tilde{b}_0, \tilde{y}'(0) = \tilde{b}_1, \dots, \tilde{y}^{(n-1)}(0) = \tilde{b}_{n-1}$$

حيث $b_i(t), 0 \leq i \leq n-1$ أعداد ضبابية. و $\tilde{y}(t, r)$ هو الحل الذي سيتم تحديده.

من خلال r -cut approach نستطيع كتابة المعادلة التفاضلية الضبابية السابقة كما يلي:

$$\begin{aligned} [\underline{y}^{(n)}(t; r), \bar{y}^{(n)}(t; r)] + a_{n-1}(t)[\underline{y}^{(n-1)}(t; r), \bar{y}^{(n-1)}(t; r)] + \dots + a_1(t)[\underline{y}'(t; r), \bar{y}'(t; r)] \\ + a_0(t)[\underline{y}(t; r), \bar{y}(t; r)] = [\underline{g}(t; r), \bar{g}(t; r)], \end{aligned} \quad (2)$$

الخاضعة للشروط الابتدائية الضبابية

$$\begin{aligned} [\underline{y}(0; r), \bar{y}(0; r)] &= [\underline{b}_0(r), \bar{b}_0(r)], [\underline{y}'(0; r), \bar{y}'(0; r)] \\ &= [\underline{b}_1(r), \bar{b}_1(r)], \dots, [\underline{y}^{(n-1)}(0; r), \bar{y}^{(n-1)}(0; r)] = [\underline{b}_{n-1}(r), \bar{b}_{n-1}(r)], : r \in [0, 1], \end{aligned}$$

نلاحظ أنه قد يكون لدينا ثلاث حالات فيما يتعلق بإشارة المعاملات.

الحالة الأولى

المعاملات $a_{n-1}(t), a_{n-2}(t), \dots, a_1(t), a_0(t)$ كلها موجبة

باستخدام تعريف تفاضل هوكوهارا يمكن أن نكتب المعادلة (12) على النحو التالي:

$$\underline{y}^{(n)}(t; r) + a_{n-1}(t)\underline{y}^{(n-1)}(t; r) + \dots + a_1(t)\underline{y}'(t; r) + a_0(t)\underline{y}(t; r) = \underline{g}(t; r), \quad (3)$$

و

$$\bar{y}^{(n)}(t; r) + a_{n-1}(t)\bar{y}^{(n-1)}(t; r) + \dots + a_1(t)\bar{y}'(t; r) + a_0(t)\bar{y}(t; r) = \bar{g}(t; r), \quad (4)$$

الخاضعة للشروط الابتدائية الضبابية

$$\begin{aligned} [\underline{y}(0; r), \bar{y}(0; r)] &= [\underline{b}_0(r), \bar{b}_0(r)], [\underline{y}'(0; r), \bar{y}'(0; r)] \\ &= [\underline{b}_1(r), \bar{b}_1(r)], \dots, [\underline{y}^{(n-1)}(0; r), \bar{y}^{(n-1)}(0; r)] \\ &= [\underline{b}_{n-1}(r), \bar{b}_{n-1}(r)], : r \in [0, 1], \end{aligned}$$

الحالة الثانية

المعاملات $a_{n-1}(t), a_{n-2}(t), \dots, a_1(t), a_0(t)$ كلها سالبة

$$\underline{y}^{(n)}(t; r) + a_{n-1}(t)\bar{y}^{(n-1)}(t; r) + \dots + a_1(t)\bar{y}'(t; r) + a_0(t)\bar{y}(t; r) = \underline{g}(t; r), \quad (5)$$

و

$$\bar{y}^{(n)}(t; r) + a_{n-1}(t)\underline{y}^{(n-1)}(t; r) + \dots + a_1(t)\underline{y}'(t; r) + a_0(t)\underline{y}(t; r) = \bar{g}(t; r), \quad (6)$$

الخاضعة للشروط الابتدائية الضبابية

$$\begin{aligned} [\underline{y}(0; r), \bar{y}(0; r)] &= [\underline{b}_0(r), \bar{b}_0(r)], [\underline{y}'(0; r), \bar{y}'(0; r)] \\ &= [\underline{b}_1(r), \bar{b}_1(r)], \dots, [\underline{y}^{(n-1)}(0; r), \bar{y}^{(n-1)}(0; r)] \\ &= [\underline{b}_{n-1}(r), \bar{b}_{n-1}(r)], : r \in [0, 1], \end{aligned}$$

الحالة الثالثة

المعاملات $a_{n-1}(t), \dots, a_{n-m}(t)$ تكون موجبة و $a_{n-m-1}(t), \dots, a_1(t), a_0(t)$ تكون سالبة. من المعادلة (2) تكون لدينا:

$$\begin{aligned} \underline{y}^{(n)}(t; r) + a_{n-1}(t)\underline{y}^{(n-1)}(t; r) + \dots + a_{n-m}(t)\underline{y}^{(n-m)}(t; r) + a_{n-m-1}(t)\bar{y}^{(n-m-1)}(t; r) \\ + a_0(t)\bar{y}(t; r) = \underline{g}(t; r), \end{aligned} \quad (7)$$

و

$$\begin{aligned} \bar{y}^{(n)}(t; r) + a_{n-1}(t)\bar{y}^{(n-1)}(t; r) + \dots + a_{n-m}(t)\bar{y}^{(n-m)}(t; r) + a_{n-m-1}(t)\underline{y}^{(n-m-1)}(t; r) \\ + a_0(t)\underline{y}(t; r) = \bar{g}(t; r), \end{aligned} \quad (8)$$

الخاضعة للشروط الابتدائية الضبابية

$$[\underline{y}(0; r), \bar{y}(0; r)] = [\underline{b}_0(r), \bar{b}_0(r)], [\underline{y}'(0; r), \bar{y}'(0; r)]$$

$$= [\underline{b}_1(r), \bar{b}_1(r)], \dots, [\underline{y}^{(n-1)}(0; r), \bar{y}^{(n-1)}(0; r)] \\ = [\underline{b}_{n-1}(r), \bar{b}_{n-1}(r)], : r \in [0, 1],$$

(4) طريقة جمع وطرح الأعداد الضبابية (Method Based on Addition and Subtraction of Fuzzy Numbers) لحل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة n [7, 12, 13].

في هذا البند تتم مناقشة الطريقة المعتمدة على جمع وطرح الأعداد الضبابية (ASFM) لحل المعادلات التفاضلية الخطية الضبابية من الرتبة n ، مع كل حالة من الحالات الثلاث التالية سيتم حل مسائلها ومقارنتها بالحلول الدقيقة. الحالة 1: المعاملات $a_{n-1}(t), a_{n-2}(t), \dots, a_1(t), a_0(t)$ كلها موجبة. أولاً: يمكن كتابة المعادلة (2) بالشكل التالي:

$$[\underline{y}^{(n)}(t; r) + \bar{y}^{(n)}(t; r)] + a_{n-1}(t) [\underline{y}^{(n-1)}(t; r) + \bar{y}^{(n-1)}(t; r)] + \dots + a_1(t) [\underline{y}'(t; r) + \bar{y}'(t; r)] \\ + a_0(t) [\underline{y}(t; r) + \bar{y}(t; r)] \\ = [\underline{g}(t; r) + \bar{g}(t; r)] \quad (9)$$

$$[\underline{y}^{(n)}(t; r) - \bar{y}^{(n)}(t; r)] + a_{n-1}(t) [\underline{y}^{(n-1)}(t; r) - \bar{y}^{(n-1)}(t; r)] + \dots + a_1(t) [\underline{y}'(t; r) - \bar{y}'(t; r)] \\ + a_0(t) [\underline{y}(t; r) - \bar{y}(t; r)] \\ = [\underline{g}(t; r) - \bar{g}(t; r)] \quad (10)$$

الخاضعة للشروط الابتدائية الضبابية

$$[\underline{y}(0; r) + \bar{y}(0; r)] = [\underline{b}_0(r) + \bar{b}_0(r)], [\underline{y}'(0; r) + \bar{y}'(0; r)] = [\underline{b}_1(r) + \bar{b}_1(r)], \dots, \\ = [\underline{y}^{(n-1)}(0; r) + \bar{y}^{(n-1)}(0; r)] = [\underline{b}_{n-1}(r) + \bar{b}_{n-1}(r)] \quad (11)$$

$$[\underline{y}(0; r) - \bar{y}(0; r)] = [\underline{b}_0(r) - \bar{b}_0(r)], [\underline{y}'(0; r) - \bar{y}'(0; r)] = [\underline{b}_1(r) - \bar{b}_1(r)], \dots, \\ = [\underline{y}^{(n-1)}(0; r) - \bar{y}^{(n-1)}(0; r)] = [\underline{b}_{n-1}(r) - \bar{b}_{n-1}(r)] \quad (12)$$

بفرض

$$[\underline{y}^{(n)}(t; r) + \bar{y}^{(n)}(t; r)] = \tilde{u}^n(t; r), \\ [\underline{y}^{(n-1)}(t; r) + \bar{y}^{(n-1)}(t; r)], \dots, [\underline{y}'(t; r) + \bar{y}'(t; r)] = \tilde{u}'(t; r), \\ [\underline{y}(t; r) + \bar{y}(t; r)] = \tilde{u}(t; r), [\underline{g}(t; r) + \bar{g}(t; r)] = \tilde{f}(t; r), \\ [\underline{y}(0; r) + \bar{y}(0; r)] = \tilde{u}(0; r), \\ [\underline{y}'(0; r) + \bar{y}'(0; r)] = \tilde{u}'(0; r), [\underline{y}^{(n-1)}(0; r) + \bar{y}^{(n-1)}(0; r)] = \tilde{u}^{(n-1)}(0; r), \\ [\underline{b}_i(r) + \bar{b}_i(r)] = \tilde{b}_i(r) \quad \text{for } 0 \leq i \leq n-1$$

$$[\underline{y}^{(n)}(t; r) - \bar{y}^{(n)}(t; r)] = \tilde{v}^n(t; r), \\ [\underline{y}^{(n-1)}(t; r) - \bar{y}^{(n-1)}(t; r)], \dots = \tilde{v}^{(n-1)}(t; r), \\ [\underline{y}'(t; r) - \bar{y}'(t; r)] = \tilde{v}'(t; r), [\underline{y}(t; r) - \bar{y}(t; r)] = \tilde{v}(t; r), \\ [\underline{g}(t; r) - \bar{g}(t; r)] = \tilde{g}(t; r), \\ [\underline{y}(0; r) - \bar{y}(0; r)] = \tilde{v}(0; r), [\underline{y}'(0; r) - \bar{y}'(0; r)] = \tilde{v}'(0; r), \\ [\underline{y}^{(n-1)}(0; r) - \bar{y}^{(n-1)}(0; r)] = \tilde{v}^{(n-1)}(0; r), \\ [\underline{b}_i(r) - \bar{b}_i(r)] = \tilde{c}_i(r) \quad \text{for } 0 \leq i \leq n-1$$

باستبدالها في المعادلات من (9) إلى (12) على التوالي نحصل على:

$$\tilde{u}^{(n)}(t; r) + a_{n-1}(t)\tilde{u}^{(n-1)}(t; r) + \dots + a_1(t)\tilde{u}'(t; r) + a_0(t)\tilde{u}(t; r) = \tilde{f}(t; r) \quad (13)$$

$$\tilde{v}^{(n)}(t; r) + a_{n-1}(t)\tilde{v}^{(n-1)}(t; r) + \dots + a_1(t)\tilde{v}'(t; r) + a_0(t)\tilde{v}(t; r) = \tilde{g}(t; r) \quad (14)$$

الخاضعة للشروط الابتدائية

$$\tilde{u}(0; r) = \tilde{b}_0(r), \tilde{u}'(0; r) = \tilde{b}_1(r), \dots, \tilde{u}^{(n-1)}(0; r) = \tilde{b}_{n-1}(r)$$

و

$$\tilde{v}(0; r) = \tilde{b}_0(r), \tilde{v}'(0; r) = \tilde{b}_1(r), \dots, \tilde{v}^{(n-1)}(0; r) = \tilde{c}_{n-1}(r)$$

على التوالي. مما يجعل المعادلات التفاضلية واضحة ويمكن حلها باستخدام أي طريقة قياسية. بعد حل المعادلتين (13)(14) يمكننا الحصول على الحلول $\tilde{u}(t; r)$ و $\tilde{v}(t; r)$ والتي يمكن من خلالها استنتاج الحل النهائي

$$\tilde{v}(t; r) = \underline{y}(t; r) - \bar{y}(t; r) \text{ و } \tilde{u}(t; r) = \underline{y}(t; r) + \bar{y}(t; r)$$

الآن بحل نظام المعادلات أعلاه يمكن الحصول على حل المعادلة (1).

مثال 1:

عين حل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية التالية

$$\tilde{y}'' + 2\tilde{y}' + 3\tilde{y} = 0$$

مع مراعاة الشروط الابتدائية الضبابية

$$\tilde{y}(0) = [0.1r + 0.9, 1.1 - 0.1r],$$

$$\tilde{y}'(0) = [0.1r - 0.1, 0.1 - 0.1r]$$

الحل:

الحل الضبابي المضبوط كالتالي:

$$\underline{Y}(t; r) = e^{-t} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{10}r + \frac{8}{10} \right) \sin \sqrt{2}t + \left(\frac{1}{10}r + \frac{9}{10} \right) \cos \sqrt{2}t \right)$$

$$\bar{Y}(t; r) = e^{-t} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{12}{10} - \frac{2}{10}r \right) \sin \sqrt{2}t + \left(\frac{11}{10} - \frac{1}{10}r \right) \cos \sqrt{2}t \right)$$

وباستخدام الطريقة المعتمدة على جمع وطرح الأعداد الضبابية نحصل على:

$$u(t; r) = \underline{y}(t; r) + \bar{y}(t; r) = e^{-t} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} 2 \sin \sqrt{2}t + 2 \cos \sqrt{2}t \right)$$

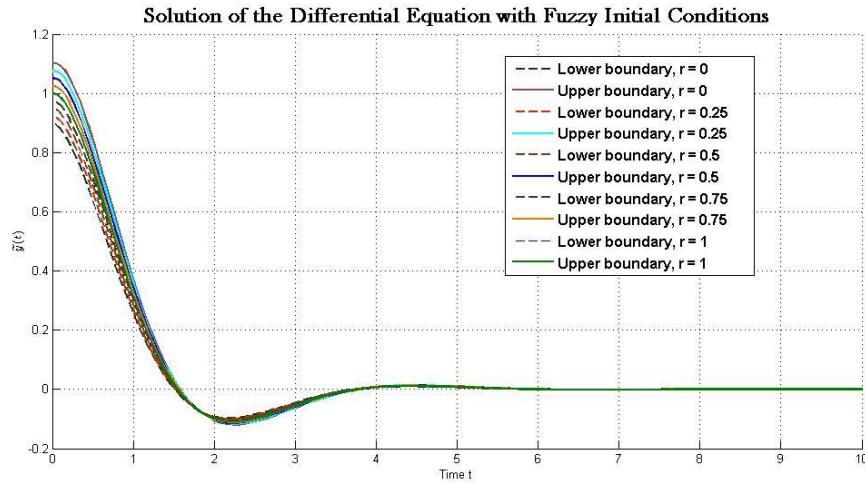
$$v(t; r) = \underline{y}(t; r) - \bar{y}(t; r) = e^{-t} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{4}{10}r - \frac{4}{10} \right) \sin \sqrt{2}t + \left(\frac{2}{10}r - \frac{3}{10} \right) \cos \sqrt{2}t \right)$$

وبعد ذلك نحصل على الحل:

$$\underline{y}(t; r) = e^{-t} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{10}r + \frac{8}{10} \right) \sin \sqrt{2}t + \left(\frac{1}{10}r + \frac{9}{10} \right) \cos \sqrt{2}t \right)$$

$$\bar{y}(t; r) = e^{-t} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{12}{10} - \frac{2}{10}r \right) \sin \sqrt{2}t + \left(\frac{11}{10} - \frac{1}{10}r \right) \cos \sqrt{2}t \right)$$

ويظهر الحل الضبابي بالشكل (4) الآتي:



شكل 4: الحل الضبابي للمعادلة التفاضلية الضبابية بالمثال 1

الحالة 2: المعاملات $a_{n-1}(t), a_{n-2}(t), \dots, a_1(t), a_0(t)$ كلها سالبة. يمكن كتابة المعادلة (2) بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} & \left[\underline{y}^{(n)}(t; r) + \bar{y}^{(n)}(t; r) \right] + a_{n-1}(t) \left[\underline{y}^{(n-1)}(t; r) + \bar{y}^{(n-1)}(t; r) \right] + \dots + a_1(t) \left[\underline{y}'(t; r) + \bar{y}'(t; r) \right] \\ & + a_0(t) \left[\underline{y}(t; r) + \bar{y}(t; r) \right] \\ & = \left[\underline{g}(t; r) + \bar{g}(t; r) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

و

$$\begin{aligned} & \left[\underline{y}^{(n)}(t; r) - \bar{y}^{(n)}(t; r) \right] + |a_{n-1}(t)| \left[\underline{y}^{(n-1)}(t; r) - \bar{y}^{(n-1)}(t; r) \right] + \dots + |a_1(t)| \left[\underline{y}'(t; r) - \bar{y}'(t; r) \right] \\ & + |a_0(t)| \left[\underline{y}(t; r) - \bar{y}(t; r) \right] \\ & = \left[\underline{g}(t; r) - \bar{g}(t; r) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

الخاضعة للشروط الابتدائية الضبابية

$$\begin{aligned} \left[\underline{y}(0; r) + \bar{y}(0; r) \right] &= \left[\underline{b}_0(r) + \bar{b}_0(r) \right], \left[\underline{y}'(0; r) + \bar{y}'(0; r) \right] = \left[\underline{b}_1(r) + \bar{b}_1(r) \right], \dots, \\ &= \left[\underline{y}^{(n-1)}(0; r) + \bar{y}^{(n-1)}(0; r) \right] = \left[\underline{b}_{n-1}(r) + \bar{b}_{n-1}(r) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \left[\underline{y}(0; r) - \bar{y}(0; r) \right] &= \left[\underline{b}_0(r) - \bar{b}_0(r) \right], \left[\underline{y}'(0; r) - \bar{y}'(0; r) \right] = \left[\underline{b}_1(r) - \bar{b}_1(r) \right], \dots, \\ &= \left[\underline{y}^{(n-1)}(0; r) - \bar{y}^{(n-1)}(0; r) \right] = \left[\underline{b}_{n-1}(r) - \bar{b}_{n-1}(r) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

على التوالي. يمكن أن نرى مرة أخرى أن المعادلات المذكورة أعلاه أصبحت الآن معادلات تفاضلية واضحة. وبالتالي، من خلال حل المعادلات المذكورة أعلاه بأي طريقة معروفة، يمكن الحصول على الحل $\tilde{u}(t; r)$ و $\tilde{v}(t; r)$ على التوالي ومن ثم عند حل هذه المعادلات يمكن الحصول على حلول المعادلات التفاضلية الضبابية.

مثال 2:

عين حل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية التالية

$$\tilde{y}'' - 3\tilde{y}' - 4\tilde{y} = 0$$

مع مراعاة الشروط الابتدائية الضبابية

$$\tilde{y}(0) = [0.2r + 0.6, 1.2 - 0.2r],$$

$$\tilde{y}'(0) = [0.2r - 0.4, 0.2 - 0.2r]$$

الحل:

الحل الضبابي المضبوط كالتالي:

$$\underline{Y}(t; r) = \frac{4}{25} e^{4t} + \frac{37}{50} e^{-t} + \frac{\sqrt{7}}{14} (-3 + 2r) e^{-\frac{3}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \left(\frac{-3}{10} + \frac{1}{5}r\right) e^{-\frac{3}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$$

$$\bar{Y}(t; r) = \frac{4}{25} e^{4t} + \frac{37}{50} e^{-t} - \frac{\sqrt{7}}{14} (-3 + 2r) e^{-\frac{3}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) - \left(\frac{-3}{10} + \frac{1}{5}r\right) e^{-\frac{3}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$$

وباستخدام الطريقة المعتمدة على جمع وطرح الأعداد الضبابية نحصل على:

$$u(t; r) = \underline{y}(t; r) + \bar{y}(t; r) = \frac{8}{25} e^{4t} + \frac{37}{25} e^{-t}$$

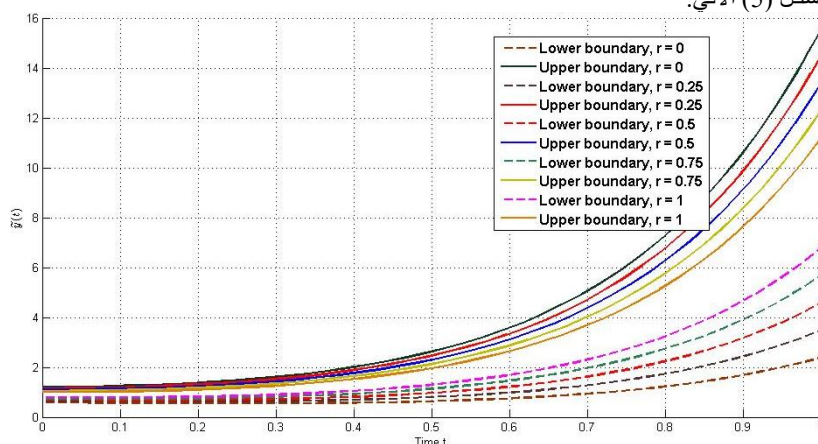
$$v(t; r) = \underline{y}(t; r) - \bar{y}(t; r) = \frac{\sqrt{7}}{7} (2r - 3) e^{-\frac{3}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \left(\frac{2}{5}r - \frac{3}{5}\right) e^{-\frac{3}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$$

وبعد ذلك نحصل على الحل:

$$\underline{y}(t; r) = \frac{4}{25} e^{4t} + \frac{37}{50} e^{-t} + \frac{\sqrt{7}}{14} (-3 + 2r) e^{-\frac{3}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \left(\frac{-3}{10} + \frac{1}{5}r\right) e^{-\frac{3}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$$

$$\bar{y}(t; r) = \frac{4}{25} e^{4t} + \frac{37}{50} e^{-t} - \frac{\sqrt{7}}{14} (-3 + 2r) e^{-\frac{3}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) - \left(\frac{-3}{10} + \frac{1}{5}r\right) e^{-\frac{3}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$$

ويظهر الحل الضبابي بالشكل (5) الآتي:



شكل 5: الحل الضبابي للمعادلة التفاضلية الضبابية بالمثال 2

الحالة 3: المعاملات $a_{n-1}(t), \dots, a_{n-m}(t)$ كلها موجبة و $a_{n-m-1}(t), a_{n-m-2}(t), \dots, a_1(t), a_0(t)$ كلها سالبة. يمكن كتابة المعادلة (2) بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} & \left[\underline{y}^{(n)}(t; r) + \bar{y}^{(n)}(t; r) \right] + a_{n-1}(t) \left[\underline{y}^{(n-1)}(t; r) + \bar{y}^{(n-1)}(t; r) \right] + \dots + a_{n-m}(t) \left[\underline{y}^{(n-m)}(t; r) + \bar{y}^{(n-m)}(t; r) \right] \\ & + a_{n-m-1}(t) \left[\underline{y}^{(n-m-1)}(t; r) + \bar{y}^{(n-m-1)}(t; r) \right] + a_0(t) \left[\underline{y}(t; r) + \bar{y}(t; r) \right] \\ & = \left[\underline{g}(t; r) + \bar{g}(t; r) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \left[\underline{y}^{(n)}(t; r) - \bar{y}^{(n)}(t; r) \right] + a_{n-1}(t) \left[\underline{y}^{(n-1)}(t; r) - \bar{y}^{(n-1)}(t; r) \right] + \dots + a_{n-m}(t) \left[\underline{y}^{(n-m)}(t; r) - \bar{y}^{(n-m)}(t; r) \right] \\ & + a_{n-m-1}(t) \left[\underline{y}^{(n-m-1)}(t; r) - \bar{y}^{(n-m-1)}(t; r) \right] + a_0(t) \left[\underline{y}(t; r) - \bar{y}(t; r) \right] \\ & = \left[\underline{g}(t; r) - \bar{g}(t; r) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

الخاضعة للشروط الابتدائية الضبابية

$$\begin{aligned} \left[\underline{y}(0; r) + \bar{y}(0; r) \right] &= \left[\underline{b}_0(r) + \bar{b}_0(r) \right], \left[\underline{y}'(0; r) + \bar{y}'(0; r) \right] = \left[\underline{b}_1(r) + \bar{b}_1(r) \right], \dots, \\ &= \left[\underline{y}^{(n-1)}(0; r) + \bar{y}^{(n-1)}(0; r) \right] = \left[\underline{b}_{n-1}(r) + \bar{b}_{n-1}(r) \right] \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \left[\underline{y}(0; r) - \bar{y}(0; r) \right] &= \left[\underline{b}_0(r) - \bar{b}_0(r) \right], \left[\underline{y}'(0; r) - \bar{y}'(0; r) \right] = \left[\underline{b}_1(r) - \bar{b}_1(r) \right], \dots, \\ &= \left[\underline{y}^{(n-1)}(0; r) - \bar{y}^{(n-1)}(0; r) \right] = \left[\underline{b}_{n-1}(r) - \bar{b}_{n-1}(r) \right] \end{aligned} \quad (22)$$

على التوالي. من خلال تطبيق نفس الخطوات كما في الحالة 1، والحالة 2، نحصل على حل المعادلات التفاضلية الضبابية.

مثال 3:

عين حل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية التالية

$$\tilde{y}'' - 6\tilde{y}' + 9\tilde{y} = 0$$

مع مراعاة الشروط الابتدائية الضبابية

$$\begin{aligned} \tilde{y}(0) &= [0.1r + 0.9, 1.1 - 0.1r], \\ \tilde{y}'(0) &= [0.1r - 1.9, 2.1 - 0.1r] \end{aligned}$$

الحل:

الحل الضبابي المضبوط كالتالي:

$$\begin{aligned} \underline{Y}(t; r) &= \left(\frac{1}{10}r + \frac{9}{10} \right) e^{3t} + te^{3t} + \left(\left(\frac{-2}{10}r + \frac{8}{10} \right) + (6 - 3\sqrt{2}) \right) te^{3t} \\ &+ te^{-3t} (\cos(3\sqrt{2}t) + \sin(3\sqrt{2}t)) \\ \bar{Y}(t; r) &= \left(\frac{11}{10} + \frac{1}{10}r \right) e^{3t} + te^{3t} + \left(\left(\frac{-12}{10} + \frac{2}{10}r \right) + (6 - 3\sqrt{2}) \right) te^{3t} \\ &+ te^{-3t} (\cos(3\sqrt{2}t) + \sin(3\sqrt{2}t)) \end{aligned}$$

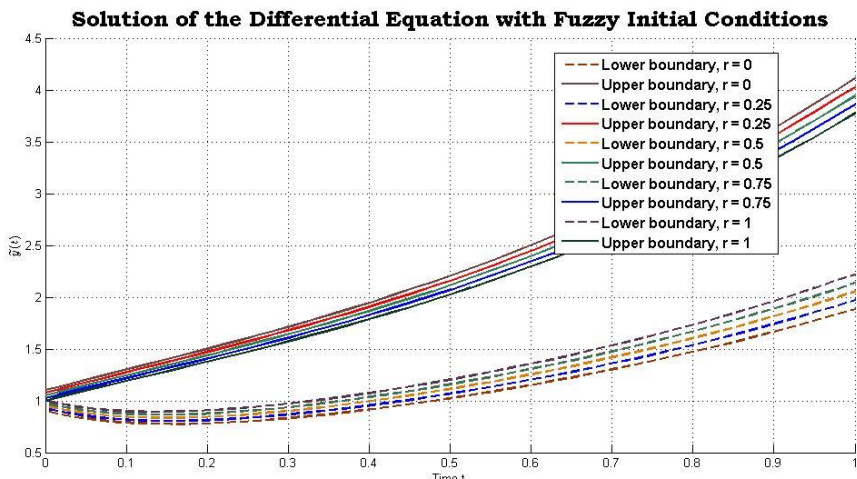
الحل باستخدام الطريقة المقترحة يكون على الصورة:

$$\begin{aligned} u(t; r) &= \underline{y}(t; r) + \bar{y}(t; r) = \\ &= \left(\frac{1}{5}r + 2 \right) e^{3t} + 2te^{3t} + \left(\left(\frac{-2}{5} \right) + (12 - 6\sqrt{2}) \right) te^{3t} \\ &+ 2te^{-3t} (\cos(3\sqrt{2}t) + \sin(3\sqrt{2}t)) \\ v(t; r) &= \underline{y}(t; r) - \bar{y}(t; r) = \left(\frac{-1}{5} \right) e^{3t} + \left(\frac{-2}{5}r + 2 \right) te^{3t} \end{aligned}$$

وبعد ذلك نحصل على الحل:

$$\begin{aligned} \underline{y}(t; r) &= \left(\frac{1}{10}r + \frac{9}{10} \right) e^{3t} + te^{3t} + \left(\left(\frac{-1}{5}r + \frac{4}{5} \right) + (6 - 3\sqrt{2}) \right) te^{3t} + te^{-3t} (\cos(3\sqrt{2}t) + \sin(3\sqrt{2}t)) \\ \bar{y}(t; r) &= \left(\frac{11}{10} + \frac{1}{10}r \right) e^{3t} + te^{3t} + \left(\left(\frac{-6}{5} + \frac{1}{5}r \right) + (6 - 3\sqrt{2}) \right) te^{3t} + te^{-3t} (\cos(3\sqrt{2}t) + \sin(3\sqrt{2}t)) \end{aligned}$$

ويظهر الحل الضبابي بالشكل (6) الآتي:



شكل 6: الحل الضبابي للمعادلة التفاضلية الضبابية بالمثال 3

(5) النتائج والمناقشة

أثبتت الطريقة المعتمدة على جمع وطرح الأعداد الضبابية كونها أداة فعالة في حل المعادلات التفاضلية الضبابية، خاصة في ظل وجود عدم دقة أو غموض في البيانات. على الرغم من التعقيدات الحسابية التي قد تنشأ، إلا أن هذه الطريقة تقدم حلولاً واقعية وقابلة للتطبيق في العديد من المشكلات. وقد تم توضيح ذلك من خلال الأمثلة التي تم حلها في هذه الدراسة، والتي شملت معاملات موجبة وسالبة ومختلطة، مما يدل على مرونة هذه الطريقة في التعامل مع مختلف الحالات. وتم التحقق من صحة الحلول باستخدام برنامج الماتلاب، مما يعزز ثقة الباحثون في هذه الطريقة واقتراحها أداة قوية لحل مجموعة واسعة من المعادلات التفاضلية الضبابية. وكذلك تمت مقارنة الحلول المتحصل عليها في هذه الدراسة مع الحل المضبوط المتحصل عليه من الدراسة (Bede (2008) وطرق أخرى تمت دراستها مثل طريقة المركز الضبابي لحل المعادلات التفاضلية الضبابية (FCM) [11]. والجدول من (1) إلى (6) تبين ذلك.

جدول (1): مقارنة بين الحلول ذات الحد الأدنى والأعلى $(\bar{Y}(t; r), Bede(2008))$ ، $(\bar{y}(t; r), (ASFM))$ للحالة الأولى الموضحة في

المثال (1) عندما $t = 0.1$.

| r | $\bar{Y}(t; r)$ Bede(2008) | $\bar{y}(t; r)$ (ASFM) | $\bar{Y}(t; r)$ Bede (2008) | $\bar{y}(t; r)$ (ASFM) |
|------|-------------------------------|---------------------------|--------------------------------|---------------------------|
| 0.00 | 0.0633 | 0.0633 | 0.0914 | 0.0914 |
| 0.25 | 0.0668 | 0.0668 | 0.0850 | 0.0850 |
| 0.50 | 0.0703 | 0.0703 | 0.0787 | 0.0787 |
| 0.75 | 0.0738 | 0.0738 | 0.0724 | 0.0724 |
| 1.00 | 0.0773 | 0.0773 | 0.0660 | 0.0660 |

جدول (2): مقارنة بين الحلول ذات الحد الأدنى والأعلى $(\bar{Y}(t; r), Bede(2008))$ ، $(\bar{y}(t; r), (ASFM))$ للحالة الأولى الموضحة في

المثال (1) عندما $t = 0.2$.

| r | $\bar{Y}(t; r)$ Bede(2008) | $\bar{y}(t; r)$ (ASFM) | $\bar{Y}(t; r)$ Bede(2008) | $\bar{y}(t; r)$ (ASFM) |
|------|-------------------------------|---------------------------|-------------------------------|---------------------------|
| 0.00 | 0.1145 | 0.1145 | 0.1653 | 0.1653 |
| 0.25 | 0.1208 | 0.1208 | 0.1539 | 0.1539 |
| 0.50 | 0.1272 | 0.1272 | 0.1424 | 0.1424 |
| 0.75 | 0.1335 | 0.1335 | 0.1309 | 0.1309 |
| 1.00 | 0.1399 | 0.1399 | 0.1195 | 0.1195 |

جدول (3): مقارنة بين الحلول ذات الحد الأدنى $(\bar{y}(t; r), (ASFM))$ ، $(\bar{y}(t; r), (FCM))$ للحالة الثانية

الموضحة في المثال (2) عندما $t = 0.1$.

| r | $\bar{Y}(t; r)$ (Bede 2008) | $\bar{y}(t; r)$ (ASFM) | $\bar{y}(t; r)$ (FCM)2024 | $ \bar{Y}(t; r) - \bar{y}(t; r) $ | $ \bar{Y}(t; r) - \bar{y}(t; r) $ |
|------|--------------------------------|---------------------------|------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 0.00 | 0.4759 | 0.4759 | 0.4755 | 0 | 0.0004 |
| 0.25 | 0.5479 | 0.5479 | 0.5475 | 0 | 0.0004 |
| 0.50 | 0.6200 | 0.6200 | 0.6195 | 0 | 0.0005 |
| 0.75 | 0.6921 | 0.6921 | 0.6916 | 0 | 0.0005 |
| 1.00 | 0.7641 | 0.7641 | 0.7635 | 0 | 0.0006 |

جدول (4): مقارنة بين الحلول ذات الحد الأعلى $(\tilde{Y}(t; r), Bede(2008))$ ، $(\tilde{y}(t; r), (ASF M))$ ، $(\tilde{y}(t; r), (FCM))$ للحالة الثانية الموضحة في المثال (2) عندما $t = 0.1$.

| r | $\bar{Y}(t; r)$ (Bede 2008) | $\bar{y}(t; r)$ (ASF M) | $\tilde{y}(t; r)$ (FCM)2024 | $ \bar{Y}(t; r) - \bar{y}(t; r) $ | $ \bar{Y}(t; r) - \tilde{y}(t; r) $ |
|------|--------------------------------|----------------------------|--------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| 0.00 | 1.3407 | 1.3407 | 1.3401 | 0 | 0.0006 |
| 0.25 | 1.2686 | 1.2686 | 1.2680 | 0 | 0.0006 |
| 0.50 | 1.1965 | 1.1965 | 1.1959 | 0 | 0.0006 |
| 0.75 | 1.1245 | 1.1245 | 1.1239 | 0 | 0.0006 |
| 1.00 | 1.0524 | 1.0524 | 1.0518 | 0 | 0.0006 |

جدول (5): مقارنة بين الحلول ذات الحد الأدنى والأعلى $(\tilde{Y}(t; r), Bede(2008))$ ، $(\tilde{y}(t; r), (ASF M))$ للحالة الثالثة الموضحة في المثال (1) عندما $t = 0.1$.

| r | $\underline{Y}(t; r)$ Bede(2008) | $\underline{y}(t; r)$ (ASF M) | $\bar{Y}(t; r)$ Bede(2008) | $\bar{y}(t; r)$ (ASF M) |
|------|-------------------------------------|----------------------------------|-------------------------------|----------------------------|
| 0.00 | 1.7931 | 1.7931 | 0.6322 | 0.6322 |
| 0.25 | 1.8201 | 1.8201 | 0.9629 | 0.9629 |
| 0.50 | 1.8471 | 1.8471 | 1.2936 | 1.2936 |
| 0.75 | 1.8741 | 1.8741 | 1.6243 | 1.6243 |
| 1.00 | 1.9011 | 1.9011 | 1.9551 | 1.9551 |

جدول (6): مقارنة بين الحلول ذات الحد الأدنى والأعلى $(\tilde{Y}(t; r), Bede(2008))$ ، $(\tilde{y}(t; r), (ASF M))$ للحالة الثالثة الموضحة في المثال (1) عندما $t = 0.01$.

| r | $\underline{Y}(t; r)$ Bede(2008) | $\underline{y}(t; r)$ (ASF M) | $\bar{Y}(t; r)$ Bede(2008) | $\bar{y}(t; r)$ (ASF M) |
|------|-------------------------------------|----------------------------------|-------------------------------|----------------------------|
| 0.00 | 0.9742 | 0.9742 | 0.1436 | 0.1436 |
| 0.25 | 0.9994 | 0.9994 | 0.4239 | 0.4239 |
| 0.50 | 1.0247 | 1.0247 | 0.7042 | 0.7042 |
| 0.75 | 1.0499 | 1.0499 | 0.9845 | 0.9845 |
| 1.00 | 1.0752 | 1.0752 | 1.2648 | 1.2648 |

(6) التوصيات

نظراً لأهمية المعادلات التفاضلية الضبابية وتطبيقاتها المتزايدة في مختلف المجالات، يُوصي الباحثون بمواصلة البحث والتوسع في حل المعادلات التفاضلية الضبابية الغير خطية والبحث والتطوير في هذا المجال الواعد وكذلك يوصي الباحثون بالتركيز على استكشاف طرق جديدة لحل هذه المعادلات، وتطبيقها على نماذج أكثر تعقيداً. وإجراء مقارنات أعمق بين الطرق المختلفة لحل المعادلات الضبابية.

(7) المراجع

- [1] Y. Chalco-Cano and H. Román-Flores, "Comparison between some approaches to solve fuzzy differential equations," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 160, no. 11, pp. 1517-1527, 2009/06/01/ 2009, doi: <https://doi.org/10.1016/j.fss.2008.10.002>.
- [2] M. Mazandarani and L. Xiu, "A review on fuzzy differential equations," *IEEE access*, vol. 9, pp. 62195-62211, 2021.
- [3] J. Dong, S. Wan, and S.-M. Chen, "Fuzzy best-worst method based on triangular fuzzy numbers for multi-criteria decision-making," *Information Sciences*, vol. 547, pp. 1080-1104, 2021.
- [4] C. D. D. Gurukumaresan, "Optimal Solution of Fuzzy Transportation Problem Using Octagonal Fuzzy Numbers," 2021.
- [5] M. Akram, A. Habib, and J. C. R. Alcantud, "An optimization study based on Dijkstra algorithm for a network with trapezoidal picture fuzzy numbers," *Neural Computing and Applications*, vol. 33, no. 4, pp. 1329-1342, 2021.
- [6] N. Gasilov, Ş. Amrahov, and A. Fatullayev, "A Geometric Approach to Solve Fuzzy Linear Systems of Differential Equations," *CoRR*, vol. abs/0910.4307, 10/22 2009.
- [7] J. J. Buckley and T. Feuring, "Fuzzy initial value problem for Nth-order linear differential equations," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 121, no. 2, pp. 247-255, 2001/07/16/ 2001, doi: [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(00\)00028-2](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(00)00028-2).
- [8] T. Allahviranloo, E. Ahmady, and N. Ahmady, "A method for solving nth order fuzzy linear differential equations," *International Journal of Computer Mathematics*, vol. 86, no. 4, pp. 730-742, 2009/04/01 2009, doi: 10.1080/00207160701704564.

- [9] R. H. Ibraheem, "Solving Linear and Nonlinear Systems of Fuzzy Differential Equations by Using Differential Transform Method," *Journal of the College of Basic Education*, vol. 28, no. 114, pp. 20 - 37, 04/07 2022, doi: 10.35950/cbej.v28i114.5453.
- [10] S. Chakraverty, S. Tapaswini, and D. Behera, *Fuzzy arbitrary order system: fuzzy fractional differential equations and applications*. John Wiley & Sons, 2016.
- [11] H. Egadi and A. Ashat, "Using the Fuzzy Centre Method to Solve Nth-order Linear Fuzzy Differential Equations with boundary and Initial Conditions," *Journal of Pure & Applied Sciences*, 2024.
- [12] S. Chakraverty, S. Tapaswini, and D. Behera, *Fuzzy differential equations and applications for engineers and scientists*. CRC Press, 2016.
- [13] T. Allahviranloo, E. Ahmady, and N. Ahmady, "Nth-order fuzzy linear differential equations," *Information Sciences*, vol. 178, no. 5, pp. 1309-1324, 2008/03/01/ 2008, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ins.2007.10.013>.
- [14] S. Chakraverty, D. S. Tapaswini, and D. D. Behera, "Analytical Methods for Fuzzy Fractional Differential Equations (FFDES)," 2016, pp. 15-29.

Using The Method Based on Addition and Subtraction of Fuzzy Numbers to Solve Linear Fuzzy Differential Equations of Order n With Initial Conditions

*A. A. Ashat¹, H. M. Egadi², Abdusslam Osman Beitalmal.³

^{*1}a Department of Mathematics, Faculty of Artist and Science Ubari, Sabha University, Sebha, Libya

^{2,3}a Department of Mathematics, Faculty of Science, Sabha University, Sebha, Libya

Amb.ashat@sebhau.edu.ly ² Hen.elgadi@sebhau.edu.ly ³ abd.beitalmal@sebhau.edu.ly

Abstract:

This paper presents a practical solution to the problem of solving linear differential equations in the presence of uncertainty. The proposed method (ASFM) relies on the addition and subtraction of fuzzy numbers to transform the fuzzy equation into a solvable equation using traditional methods. The study covers three different cases of fuzzy coefficients, based on the signs of the equation's coefficients. The method is illustrated through practical examples, expanding its range of applications. Experimental results confirm the effectiveness and applicability of this method.

Keywords: Fuzzy Number-Fuzzy Differential Equations -Method Based on Addition and Subtraction of Fuzzy Numbers-Hukuhara Derivative -Fuzzy Boundary Value Problem