

## مقارنة بين الحلول التحليلية لمعادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية من النوع الثاني

سماح بشير حسين المجعوك

قسم الرياضيات كلية العلوم

s.almajouk@sci.misuratau.edu.ly .

Publishing date: 9/1/2025

**الملخص:** الهدف من هذه الورقة، تطبيق طريقتين تعتبر من الطرق التحليلية الهامة لحل معادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية من النوع الثاني، وتتضمن طريقتي التحليل لأدوميان (ADM) وهوموتوبي الاضراب (HPM) المعدلة التي يتم فيها فرض حل تقريبي للمعادلة غير الخطية في صورة متسلسلة لانهاية تتقارب غالباً إلى الحل الفعلي. تكشف مقارنة النتائج المتحصل عليها مدى فاعلية ودقة هاتين الطريقتين وتكافؤهما في حل معادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية.

**الكلمات المفتاحية:** طريقة التحليل لأدوميان (ADM)، طريقة هوموتوبي الاضراب (HPM) المعدلة، معادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية.

### المقدمة:

لحلول المعادلات التكاملية دور كبير في مجالات العلوم والهندسة، مثل ميكانيكا الموائع والميكانيكا الحيوية ودراسة المواد ذات المرونة اللزجة وفي المجال الإحصائي من خلال علم التركيبة السكانية [1-3]. معادلات فولتيرا التكاملية تم تقديمها للعلن بواسطة العالم فيتو فولتيرا وقام العالم ترايين لاليسكو بشرحها في مؤلفاته عام 1908 وتم كتابتها تحت إشراف العالم الفرنسي شارل بيكار. تم استخدام العديد من المخططات العددية والتحليلية لحل مثل هذه المسائل مثل طريقة العناصر المحدودة، وطريقة الفروق المحدودة، وطرق الاضطراب، للحصول على حلول تقريبية لحل المعادلات التكاملية. في بداية الثمانينات، تم اقتراح طريقة جديدة من قبل أدوميان [5] تسمى بطريقة التحليل لأدوميان (ADM) لحل المعادلات التكاملية الخطية وغير الخطية. كما قام وزوا بن تطوير طريقة التحليل لأدوميان وتقديمها في كتابه [3]. في السنوات الأخيرة، تمت دراسة بعض تقنيات الاضطراب في المسائل الخطية وغير الخطية من قبل العلماء والمهندسين، كذلك استخدم بيزار وآخرون طريقة هوموتوبي الاضطراب المعدلة في مؤلفاتهم [10-16] لحل معادلة فولتيرا التكاملية الخطية وغير الخطية من النوع الثاني.

في هذه الورقة، سنقوم بدراسة طريقتين تحليليتين لحل معادلة فولتيرا غير الخطية من النوع الثاني. تم اعداد بعض الأمثلة للمقارنة بين هذه الحلول لإظهار كفاءة ومقدرة هاتين الطريقتين. تم اجراء الحسابات المرتبطة بالأمثلة الواردة في هذا البحث باستخدام (Matlab).

### معادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية من النوع الثاني:

معادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية من النوع الثاني على الصورة

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t, u(t)) dt, \quad (1)$$

حيث النواة  $k(x, t, u(t))$  دالة حقيقية القيمة غير خطية والدالة  $f(x)$  دالة تحليلية حقيقية القيمة [3,7].  
**وجود ووحداية الحل:**

**نظرية 1:** بفرض معادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية (1)، إذا كان

$$(1) \quad f(x) \text{ دالة قابلة للتكامل ومحدودة على } a \leq x \leq b.$$

$$(2) \quad \text{الدالة } f(x) \text{ تحقق شرط ليبشز داخل الفترة } (a, b).$$

$$|f(x) - f(y)| < L|x - y|.$$

$$(3) \quad \text{الدالة } k(x, t, u(t)) \text{ قابلة للتكامل ومحدودة على الفترة } a \leq x, t \leq b.$$

$$(4) \quad \text{النواة } k(x, t, u(t)) \text{ تحقق شرط ليبشز}$$

$$|k(x, t, Y) - k(x, t, Z)| < L|Y - Z|,$$

حيث  $L$  عدد حقيقي موجب مستقل عن  $x, Y, t, Z$ . عندئذ، المعادلة (1) لها حل وحيد متصل على الفترة  $0 \leq x \leq T$  [7,9].

### كيفية عمل طريقة التحليل لأدوميان:

وليتم تطبيق طريقة ADM على معادلة فولتيرا التكاملية غير خطية من النوع الثاني نفرض معادلة فولتيرا غير الخطية على الصورة

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t) G(u(t)) dt, \quad (2)$$

حيث الدالة  $G(u(t))$  غير خطية في  $u(t)$ . حيث تعتمد هذه الطريقة على فرض حل تقريبي للمعادلة التكاملية في صورة متسلسلة لانهاية تعطى بالصيغة

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (3)$$

أو

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots, \quad (4)$$

### تقارب طريقة التحليل لأدوميان:

**نظرية 2:** إذا كانت  $N(u)$  دالة تحليلية في  $u$  على الفترة  $(-R, R)$  وكانت  $u(x)$  دالة يمكن تمثيلها بمتسلسلة لانهاية  $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ، فإن التمثيل البارامتر  $u_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda^n$  يكون متقاربا مطلقاً لكل  $\lambda \in [-1, 1]$  والمتسلسلة  $u$  يمكن تحديدها بواسطة:

$$\frac{m'}{(1+\varepsilon)} \left( 1 + \frac{1}{(1+\varepsilon)} \left( \frac{\lambda}{\rho} \right) + \dots + \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \left( \frac{\lambda}{\rho} \right)^n + \dots \right),$$

حيث  $m' \geq m$  (النهاية العليا للمركبات  $u_n$ )،  $\varepsilon > \frac{m}{R}$  و  $\rho \geq 1$ ، فإن المتسلسلة الثنائية

$$N(u) = a_0 + a_1 u_0 + a_2 u_0^2 + \dots + a_n u_0^n + \dots + a_1 u_1 \lambda + 2a_2 u_0 u_1 \lambda + \dots + na_n u_0^{n-1} u_1 \lambda + \dots + a_1 u_2 \lambda^2 + a_2 (u_1^2 + 2u_0 u_2) + \dots$$

متقاربة عندما  $\lambda = 1$  [18].

تهتم طريقة ادميان بإيجاد المركبات  $u_n(x)$  لكل  $n \geq 0$ ، وعلى الرغم من أن الدالة الخطية  $u(x)$  يتم استبدالها بواسطة متسلسلة لا نهائية من المركبات (3) فإن الحدود غير الخطية مثل  $u^2, u^3, u^4, \sin u, e^u$ ، وغيرها من الدوال التي من الممكن أن تظهر في المعادلة، يجب التعبير عنها بتمثيل خاص، يسمى متعددات حدود ادميان  $A_n, n \geq 0$ . والدالة غير الخطية  $G(u)$  تتحلل وفقا للصيغة

$$G(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (5)$$

من الضروري تمثيل الحدود غير الخطية بواسطة حدوديات ادميان للتعامل مع المعادلات التكاملية غير الخطية بطريقة أمثل. فيما يلي، سنقوم بتقديم خوارزمية ادميان لحساب ما يسمى بمتعددات حدود ادميان (Adomian Polynomials) لتمثيل الحدود غير الخطية [3].

#### • حساب متعددات حدود ادميان

حيث أن طريقة التحليل لادوميان تقوم على تمثيل الحل للدالة الخطية بمتسلسلة لانهاية من المركبات معطاة بالعلاقة (3)، بالتالي الطرف غير الخطي  $G(u)$  المعطى بالمعادلة (5)، يجب استبداله بمتعددات حدود ادميان  $A_n$  المعرفة بالعلاقة

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [G(\sum_{i=0}^n \lambda^i u_i)]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6)$$

ومن هذه العلاقة يمكن حساب متعددات حدود ادميان  $A_n$  لكل الاطراف غير الخطية. الصيغة العامة (6) من السهل استخدامها كما يلي:

يفرض الدالة غير الخطية  $G(u(x))$ ، وباستخدام (6)، متعددات حدود ادميان يتم حسابها كما يلي

$$\begin{aligned} A_0 &= G(u_0), \\ A_1 &= u_1 G'(u_0), \\ A_2 &= u_2 G'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 G''(u_0), \\ A_3 &= u_3 G'(u_0) + u_1 u_2 G''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 G'''(u_0), \end{aligned} \quad (7)$$

تجدر الاشارة هنا إلى أن  $A_0$  تعتمد فقط على  $u_0$ ، كذلك  $A_1$  تعتمد على  $u_0$  و  $u_1$ ، و  $A_2$  تعتمد فقط على  $u_0, u_1, u_2$ ، وهكذا. وبالتالي فإن

$$\begin{aligned} G(u) &= A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \dots \\ &= G(u_0) + (u_1 + u_2 + u_3 + \dots) G'(u_0) \\ &\quad + \frac{1}{2!} (u_1^2 + 2u_1 u_2 + 2u_1 u_3 + u_2^2 + \dots) G''(u_0) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{3!} (u_1^3 + 3u_1^2 u_2 + 3u_1^2 u_3 + 6u_1 u_2 u_3 + \dots) G'''(u_0) + \dots \\ &= G(u_0) + (u - u_0) G'(u_0) + \frac{1}{2!} (u - u_0)^2 G''(u_0) + \dots. \end{aligned} \quad (8)$$

المفكوك الاخير يؤكد على حقيقة ان المتسلسلة من حدوديات  $A_n$  تكون متسلسلة تايلور حول الدالة  $u_0$  وليس حول نقطة كما في متسلسلة تايلور الاعتيادية. في ما يلي، سنقوم بحساب متعددات حدود ادميان لبعض الدوال غير الخطية التي من الممكن ان تظهر في المعادلات التكاملية غير الخطية [3].

#### الحالة 1.

متعددات حدود ادميان للدالة  $G(u) = u^2$  تعطى بواسطة

$$\begin{aligned} A_0 &= G(u_0) = u_0^2, \\ A_1 &= u_1 G'(u_0) = 2u_0 u_1, \\ A_2 &= u_2 G'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 G''(u_0) = 2u_0 u_2 + u_1^2, \\ A_3 &= u_3 G'(u_0) + u_1 u_2 G''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 G'''(u_0) = 2u_0 u_3 + 2u_1 u_2, \end{aligned}$$

#### الحالة 2.

متعددات حدود ادميان للدالة  $G(u) = u^3$  تعطى بواسطة

$$\begin{aligned} A_0 &= G(u_0) = u_0^3, \\ A_1 &= u_1 G'(u_0) = 3u_0^2 u_1, \\ A_2 &= u_2 G'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 G''(u_0) = 3u_0^2 u_2 + 3u_0 u_1^2, \\ A_3 &= u_3 G'(u_0) + u_1 u_2 G''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 G'''(u_0) = 3u_0^2 u_3 + 6u_0 u_1 u_2 + u_1^3 \end{aligned}$$

#### مفهوم الهوموتوبي:

هو مفهوم اساسي في التولوجيا والهندسة التفاضلية [15]، يعود إلى الرياضي الفرنسي Jules Henri Poincare (1854-1912) [17]. ويعرف الهوموتوبي بين دالتين متصلتين  $f$  و  $g$  من فضاء تولوجي  $X$  إلى فضاء تولوجي  $Y$  على انه الدالة المتصلة:

$$H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

بحيث يتحقق انه إذا كان:

$$x \in X \rightarrow H(x; 0) = f(x),$$

$$H(x; 1) = g(x)$$

فإن الهوموتوبي يأخذ الصيغة التالية:  
(9)

$$H(x; q) = (1 - q)f(x) + qg(x), 0 \leq q \leq 1.$$

**طريقة هوموتوبي الاضطراب:**

لتوضيح المفهوم الاساسي لطريقة HPM [14,11,10]، نعتبر المعادلة غير الخطية التالية:

$$A(u) = f(r), \quad r \in \Omega \quad (10)$$

مع الشروط الحدية

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0, \quad r \in \Gamma$$

حيث  $A$  مؤثر دالي عام،  $B$  مؤثر محدود،  $f(r)$  دالة تحليلية معلومة و  $\Gamma$  حدودية النطاق  $\Omega$ . بصفة عامة، يمكن تقسيم المؤثر  $A$  الى مؤثرين: خطي وغير خطي  $L$  و  $N$  على التوالي. بالتالي المعادلة (10) يمكن اعادة كتابتها على الصورة

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0. \quad (11)$$

وفقا لتقنية الهوموتوبي، يمكننا بناء هوموتوبي

$$v(r, p): \Omega \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

والذي يحقق:

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0, \quad p \in [0,1], r \in \Omega, \quad (12)$$

او على الصورة

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0, \quad (13)$$

بحيث

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0$$

$$H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0$$

هذا يبين أن عملية التغيير للبارامتر التضميني  $p$  من 0 إلى 1 هي فقط عملية تغير  $v(r, p)$  من  $u_0(x)$  إلى الحل  $u(x)$ ، حيث  $u_0$  التقريب المبدئي لحل المعادلة (10). في التبولوجيا، هذا يعرف بالتشوه (deformation) والمقادير  $L(v) - L(u_0)$  و  $A(v) - f(r)$  تسمى (homotopic). لذلك نعتبر انه يمكن التعبير عن حل المعادلة (13) على النحو التالي:

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (14)$$

بوضع  $p = 1$ ، نحصل على الحل التقريبي للمعادلة (1) كما يلي:

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (15)$$

**تقارب طريقة هوموتوبي الاضطراب:**

**نظرية 3:** بفرض الدوال  $k(x, t)$  و  $f(x)$ ، في المعادلة (1) متصلة على المنطقة  $\Omega_1 = [a, b] \times [a, b]$  و  $\Omega = [a, b]$  على التوالي. عندئذ المتسلسلة (18) مع التقريب المبدئي  $u_0$  تكون متقاربة بانتظام إلى الحل الوحيد  $U(x)$  في الفترة  $[a, b]$  لكل  $p \in [0,1]$ . [4]

**كيفية عمل طريقة هوموتوبي الاضطراب المعدلة:**

لحل معادلات فولتيرا التكاملية غير الخطية سنقوم بتطبيق نهج جديد لطريقة HPM [12,7]. لتوضيح الفكرة الاساسية لهذه الطريقة، نعرض معادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t, u(t)) dt, \quad 0 \leq t \leq x \leq T, \quad (16)$$

بواسطة تقنية الهوموتوبي، نقوم ببناء الهوموتوبي

$$u^*(r, p): \Omega \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

والذي يحقق

$$H(u^*, p) = (1 - p) \left[ u^*(x) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \right] + p \left[ u^*(x) - f(x) - \lambda \int_0^x k(x, t, u^*(t)) dt \right] = 0, p \in [0,1], r \in \Omega \quad (17)$$

حيث  $a_0, a_1, a_2, \dots$  معاملات مجهولة، الدوال  $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots$  محددة معتمدة على المسألة و  $p \in [0,1]$  بارامتر تضميني. تبعا لطريقة HPM القياسية، نعرض البارامتر  $p$  صغير، والحلول للمعادلة (17) يتم تمثيلها كمتسلسلة قوى في  $p$  كما يلي

$$u^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n^*(x) = u_0^* + pu_1^* + p^2u_2^* + p^3u_3^* \dots \quad (18)$$

الآن يتم وضع المعادلة (17) على الصيغة

$$u^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) - p \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) - f(x) - \lambda \int_0^x k(x, t, u^*(t)) dt \right]. \quad (19)$$

وبالتعويض عن المعادلة (18) في المعادلة (19)، نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) - p \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) - f(x) - \lambda \int_0^x k \left( x, t, \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n^*(x) \right) dt \right]. \quad (20)$$

بمساواة معاملات  $p$  ذات القوى المتشابهة، نتحصل على

$$\begin{aligned} p^0: u_0^*(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \\ p^1: u_1^*(x) &= - \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) + f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t, u_0^*(t)) dt, \\ p^2: u_2^*(x) &= \lambda \int_0^x k(x, t, u_0^*(t), u_1^*(t)) dt, \\ p^3: u_3^*(x) &= \lambda \int_0^x k(x, t, u_0^*(t), u_1^*(t), u_2^*(t)) dt, \\ &\vdots \\ p^j: u_j^*(x) &= \lambda \int_0^x k(x, t, u_0^*(t), u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_{j-1}^*(t)) dt, \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (21)$$

الآن إذا حللنا هذه المعادلات، وذلك بفرض ان  $u_1^*(t) = 0$ ، عندئذ المعادلات  $u_2^*(t) = u_3^*(t) = \dots = 0$  وبالتالي الحل التحليلي للمعادلة (16) يكون على النحو التالي

$$u(x) = u_0^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad (22)$$

تجدد الإشارة إلى انه إذا كانت  $f(x)$  و  $k(x, t)$  دالتان تحليليتان، فإنهما يمتلكان متسلسلة تايلور ومن ثم يمكن استخدامهما في المعادلة (19) [12].

#### النتائج العددية:

##### مثال (1):

أوجد حل معادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية التالية [3]:

$$u(x) = x - \int_0^x u^2(t) dt \quad (23)$$

الحل الفعلي للمعادلة هو:  $u(x) = \tanh x$ .

الحل: أولاً: بتطبيق طريقة التحليل لادوميان ADM:

يتم تمثيل الدالة غير الخطية  $u^2(t)$  بمتعددات حدود ادوميان

$$u^2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (24)$$

والتي يتم حسابها كما في الحالة 1 حيث

$$\begin{cases} A_0 = u_0^2, \\ A_1 = 2u_0u_1, \\ A_2 = 2u_0u_2 + u_1^2, \end{cases}$$

بالتعويض عن متعددات حدود ادوميان (24) في طرفي المعادلة (23) نتحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = x - \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} A_n dt, \quad (25)$$

بتفكيك متسلسلة المعادلة (25) وبتطبيق طريقة التحليل، نتحصل على الصيغة التكرارية:

$$u_0(x) = x, \quad u_{n+1}(x) = - \int_0^x A_n dt, \quad n \geq 0 \quad (26)$$

بالتعويض عن المركبة  $u_0^2(x) = A_0(x)$  في العلاقة التكرارية (26)، نتحصل على المركبة  $u_1(x)$  كما يلي

$$u_1(x) = - \int_0^x A_0 dt = - \int_0^x u_0^2(t) dt = - \frac{1}{3} x^3,$$

ومن ذلك فإنه لكل  $n \geq 2$  باقي المركبات ستكون على الصورة

$$\begin{cases} u_2(x) = -\int_0^x (2u_0(t)u_1(t))dt = \frac{2}{15}x^5, \\ u_3(x) = -\int_0^x (2u_0(t)u_2(t) + u_1^2(t))dt, \\ \quad = -\frac{17}{315}x^7, \\ u_4(x) = -\int_0^x (2u_0(t)u_3(t) + 2u_1(t)u_2(t))dt, \\ \quad = \frac{62}{2835}x^9, \end{cases}$$

وبهذه الطريقة نقوم بحساب باقي المركبات وتجميعها، نتحصل على متسلسلة الحل للمعادلة المعطاة (23) على الصورة

$$u(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 - \dots, \quad (27)$$

والتي تتقارب إلى الحل في الصورة المغلقة:

$$u(x) = \tanh x. \quad (28)$$

ثانياً: بتطبيق طريقة HPM المعدلة:

نقوم ببناء الهوموتوبي

$$(1-p)\left(u(x) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) + p\left(u(x) - x + \int_0^x u^2(t) dt\right) = 0 \quad (29)$$

بالتعويض عن المعادلة (18) في المعادلة (28)، ومساواة معاملات  $p$  ذات القوى المتشابهة نحصل على الصيغ التالية:

$$p^0: u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

$$p^1: u_1(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x - \int_0^x u_0^2(t) dt,$$

ولكل  $j \geq 2$  فإن:

$$p^j: u_j(x) = -\int_0^x \sum_{k=0}^{j-1} u_k(t) u_{j-k-1}(t) dt.$$

بالتعويض عن قيمة  $u_0$  في المركبة  $u_1$

$$u_1(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x - \int_0^x (a_0^2 + 2a_0 a_1 t + (2a_0 a_2 + a_1^2)t^2 + \dots) dt,$$

الآن، بوضع  $u_1 = 0$  واجراء التكامل الناتج، نحصل على

$$\begin{aligned} -a_0 + (1 - a_1 - a_0^2)x + (-a_2 - a_0 a_1)x^2 + \left(-a_3 - \frac{1}{3}(a_1^2 + 2a_0 a_2)\right)x^3 \\ + \left(-a_4 - \frac{1}{2}(a_0 a_3 + a_1 a_2)\right)x^4 + \left(-a_5 - \frac{2}{5}(a_0 a_4 + a_1 a_3) + a_1^2\right)x^5 \\ + \left(-a_6 - \frac{1}{3}(a_0 a_5 + a_1 a_4 + a_2 a_3)\right)x^6 + \left(-a_7 - \frac{2}{7}(a_0 a_6 + a_1 a_5 + a_2 a_4) + a_2^2\right)x^7 \\ + \dots = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

وبالتالي ينتج أن باقي المركبات  $u_j = 0$  لكل  $j \geq 2$ .

المتسلسلة (30) متسلسلة قوى مساوية للصفر بالتالي المعاملات كلها اصفار ومن ذلك نتحصل على

$$\begin{cases} a_0 = 0, & a_1 = 1, & a_2 = 0, & a_3 = -\frac{1}{3}, \\ a_4 = 0, & a_5 = \frac{2}{15}, & a_6 = 0, \\ a_7 = -\frac{17}{315}, & a_8 = 0, & a_9 = \frac{62}{2835}, \dots \end{cases}$$

بالتعويض عن هذه المعاملات في المركبة الصفرية  $u_0$  نتحصل على

$$u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 - \dots, \quad (31)$$

وبناء على ذلك، الحل للمعادلة المعطاة (23) يكون

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}. \quad (32)$$

حيث  $B_{2n}$  هي أعداد بيرنولي. ويمكن وضع الحل (32) في الصورة المغلقة

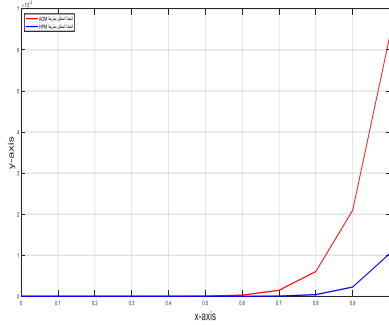
$$u(x) = \tanh x. \quad (32)$$

ليبيان مدى تقارب ADM والمعدلة وفعاليتها، جدول 1. يتضمن مقارنة الحل الفعلي بالحلول التقريبية الناتجة عند التقريبات الخمسة الأولى فقط:

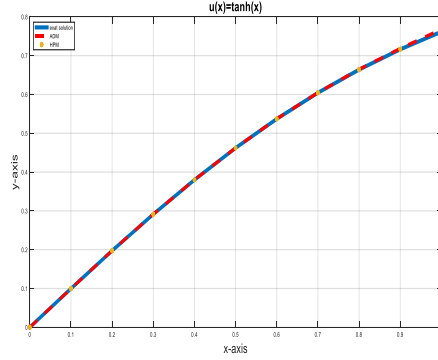
جدول 1: الخطأ المطلق الناتج من مقارنة الحل الفعلي بالحلول التقريبية المتحصل عليها للمثال 1

x	الحل الفعلي	حل ADM	حل HPM المعدلة	الخطأ المطلق	الخطأ المطلق
	$u(x) = \tanh x$			ADM	mHPM
0	0	0	0	0	0
0.1	0.09966799462496	0.09966799462504	0.09966799462496	$8.8 \times e^{-14}$	0
0.2	0.19737532022490	0.19737532040353	0.19737532022495	$1.78623 \times e^{-10}$	$4.7 \times e^{-14}$
0.3	0.29131261245159	0.29131262760000	0.29131261247175	$1.5148409 \times e^{-8}$	$2.0155 \times e^{-11}$
0.4	0.37994896225523	0.37994931136790	0.37994896372322	$3.49112676 \times e^{-7}$	$1.467997 \times e^{-9}$
0.5	0.46211715726001	0.46212108686067	0.46211719760114	$3.92960066 \times e^{-6}$	$4.0341129 \times e^{-8}$
0.6	0.53704956699804	0.53707762834286	0.53705016435380	$2.80613448 \times e^{-5}$	$5.97355768 \times e^{-7}$
0.7	0.60436777711716	0.60451399496790	0.60437354361455	$1.46217851 \times e^{-4}$	$5.76649738 \times e^{-6}$
0.8	0.66403677026785	0.66464130988924	0.66407744308172	$6.04539621 \times e^{-4}$	$4.06728138 \times e^{-5}$
0.9	0.71629787019903	0.71839183937143	0.71652353289722	$2.09396917 \times e^{-3}$	$2.25662698 \times e^{-4}$
1	0.76159415595577	0.76790123456790	0.76263012707457	$6.30707861 \times e^{-3}$	$1.03597112 \times e^{-3}$

نلاحظ في الجدول، الحصول على دقة عالية ونتائج مقاربة بتطبيق كلا الطريقتين، حيث تم الحصول على 14 رقم معنوي عند  $x = 0.1$  و 9 ارقام معنوية عند نفس القيمة بتطبيق ADM بأقل عدد من التقريبات، شكل 1 يوضح تمثيل الحلول المتحصل عليها من ADM و HPM المعدلة والحل الفعلي لخمسة تقريبات، كما يوضح الشكل 2 تمثيل مقدار الخطأ المطلق الناتج من مقارنة الحل الفعلي بالحلول التقريبية المتحصل . .



شكل 2: الخطأ المطلق الناتج



شكل 1: مقارنة الحل الفعلي بالحلول التقريبية الناتجة

مثال (2):

اوجد حل معادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية التالية [2]:

$$u(x) = 1 - \frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \int_0^x u^3(t) dt, \quad (33)$$

الحل الفعلي للمعادلة هو:  $u(x) = 1 + x$

الحل: أولاً: بتطبيق طريقة التحليل لادوميان ADM:

يتم تمثيل الدالة الخطية بالمتسلسلة (3) والدالة غير الخطية  $u^3(t)$  بمتعددات حدود ادوميان لها، وبالتعويض في طرفي المعادلة (33) نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 1 - \frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} A_n dt, \quad (34)$$

بتفكيك متسلسلتي المعادلة (34) وتطبيق طريقة التحليل المعدلة، نتحصل على الصيغة التكرارية:

$$\begin{cases} u_0(x) = 1 \\ u_1(x) = \int_0^x A_0(t) dt = \int_0^x u_0^3(t) dt \\ \quad = x - \frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{4}x^4 \\ u_{n+1}(x) = \int_0^x A_n(t) dt, \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (35)$$

بحساب باقي المركبات، نتحصل على

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \int_0^x (3u_0^2(t)u_1(t)) dt = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^4 - \frac{3}{20}x^5 \\ u_3(x) &= \int_0^x (3u_0^2(t)u_2(t) + 3u_0(t)u_1^2(t)) dt = \frac{5}{2}x^3 - \frac{27}{8}x^4 - \frac{3}{10}x^5 + \dots \\ u_4(x) &= \int_0^x (3u_0^2(t)u_3(t) + 6u_0(t)u_1(t)u_2(t) + u_1^3(t)) dt \\ &= \frac{35}{8}x^4 - \frac{297}{40}x^5 + \frac{19}{40}x^6 + \dots \end{aligned}$$

وبهذه الطريقة نقوم بحساب باقي المركبات وتجميعها، نتحصل على متسلسلة الحل للمعادلة المعطاة (33) على الصورة

$$u(x) = 1 + x + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)x^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\right)x^3 + \left(\frac{35}{8} - \frac{35}{8}\right)x^4 + \dots, \quad (36)$$

بإلغاء حدود الضوضاء [6]، المتسلسلة (36) تتقارب إلى الحل في الصورة المغلقة

$$u(x) = 1 + x. \quad (37)$$

ثانياً: بتطبيق طريقة HPM المعدلة:

نقوم ببناء الهوموتوبي

$$(1-p) \left( u(x) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) + p \left( u(x) - 1 + \frac{3}{2}x^2 + x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \int_0^x u^3(t) dt \right) = 0 \quad (38)$$

بالتعويض عن المعادلة (18) في المعادلة (38)، ومساواة معاملات  $p$  ذات القوى المتشابهة نحصل على الصيغ التالية:

$$p^0: u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$p^1: u_1(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 1 - \frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \int_0^x u_0^3(t) dt$$

ولكل  $j \geq 2$  فإن:

$$p^j: u_j(x) = \int_0^x \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{k=0}^{j-i-1} u_i(t) u_k(t) u_{j-i-k-1}(t) dt.$$

بالتعويض عن قيمة  $u_0$  في المركبة  $u_1$  كما يلي

$$u_1(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 1 - \frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \int_0^x (a_0^3 + 3a_0^2 a_1 t + (3a_0 a_1^2 + 3a_0 a_1^2) t^2 + \dots) dt,$$

الآن، بوضع  $u_1 = 0$  وإجراء التكامل الناتج، نحصل على

$$-a_0 + 1 + (-a_1 + a_0^3) + \left(-a_2 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} a_0^2 a_1\right) x^2 + (-a_3 - 1 + (a_0 a_1^2 + a_0^2 a_2)) x^3 + \left(-a_4 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} (a_1^3 + 6a_1 a_2 a_0 + 3a_3 a_0^2)\right) x^4 + \dots = 0 \quad (39)$$

وبالتالي ينتج أن باقي المركبات  $u_j = 0$  لكل  $j \geq 2$ .

المتسلسلة (39) متسلسلة قوى مساوية للصفر بالتالي المعاملات كلها اصفار ومن ذلك نتحصل على

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 0, \dots$$

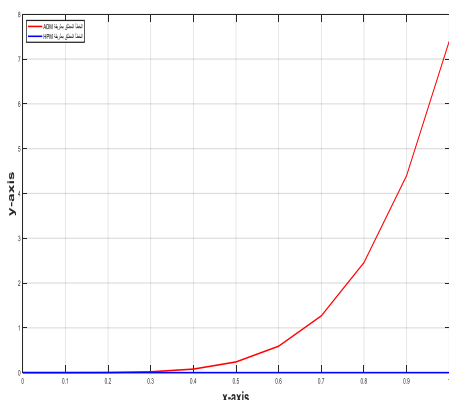
بالتعويض عن هذه المعاملات في المركبة الصفرية  $u_0$  نتحصل على الحل للمعادلة المعطاة (33) على الصورة:

$$u(x) = u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + x \quad (40)$$

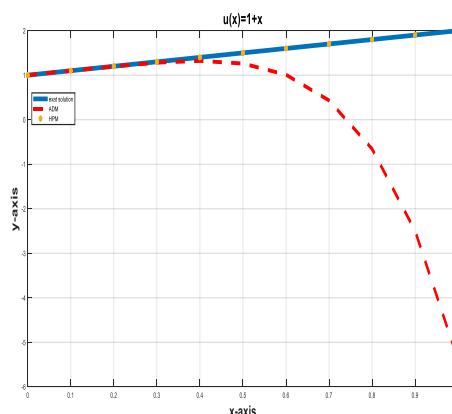
ليبين مدى تقارب ADM و HPM المعدلة وفعالتهما، جدول 2. يتضمن مقارنة الحل الفعلي بالحلول التقريبية الناتجة عند التقريبات الخمسة الأولى فقط:

جدول 2: الخطأ المطلق الناتج من مقارنة الحل الفعلي بالحلول التقريبية المتحصل عليها للمثال

x	الحل الفعلي	حل ADM	حل HPM المعدلة	الخطأ المطلق	
	$u(x) = x + 1$			ADM	mHPM
0	1.00000000000000	1.00000000000000	1.00000000000000	0	0
0.1	1.10000000000000	1.09992172250000	1.10000000000000	$7.82750 \times e^{-5}$	0
0.2	1.20000000000000	1.19751040000000	1.20000000000000	$2.48960 \times e^{-3}$	0
0.3	1.30000000000000	1.28121002500000	1.30000000000000	$1.87900 \times e^{-2}$	0
0.4	1.40000000000000	1.32130560000000	1.40000000000000	$7.86944 \times e^{-1}$	0
0.5	1.50000000000000	1.26132812500000	1.50000000000000	$2.38672 \times e^{-1}$	0
0.6	1.60000000000000	1.00980160000000	1.60000000000000	$5.90198 \times e^{-1}$	0
0.7	1.70000000000000	0.43233202500000	1.70000000000000	1.267667975	0
0.8	1.80000000000000	-0.65596160000000	1.80000000000000	2.455961600	0
0.9	1.90000000000000	-2.49767427500000	1.90000000000000	4.397674275	0
1	2.00000000000000	-5.40000000000000	2.00000000000000	7.400000000	0



شكل 4: مقارنة الخطأ المطلق



شكل 3: مقارنة الحل الفعلي بالحلول التقريبية الناتجة

نلاحظ في الجدول تباعد النتائج المتحصل عليها بتطبيق ADM وذلك لأنه تم أخذ فقط أول خمسة تقريبات دون تطبيق حدود الضوضاء، والحصول على نتائج متطابقة مع الحل الفعلي بطريقة HPM المعدلة وذلك للحصول على الحل الفعلي من التقريب الأول. الشكل 3، يوضح تمثيل الحل المتحصل عليها من ADM و hpm المعدلة والحل الفعلي لخمس تقريبات، كما يوضح الشكل 4 تمثيل مقدار الخطأ المطلق الناتج من مقارنة الحل الفعلي بالحلول التقريبية المتحصل .

**مثال (3):**

أوجد حل معادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية التالية [2]:

$$u(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}(1 - e^{-2x}) - \int_0^x u^2(t) dt, \quad (41)$$

الحل الفعلي لهذه المعادلة هو:  $u(x) = e^{-x}$

**الحل: أولاً: بتطبيق طريقة التحليل لادوميان ADM:**

يتم تمثيل الدالة الخطية بالمتسلسلة (3) والدالة غير الخطية  $u^2(t)$  بمتعددات حدود ادوميان لها، وبالتعويض في طرفي المعادلة (41) نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}(1 - e^{-2x}) - \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} A_n dt, \quad (42)$$

بتفكيك متسلسلي المعادلة (42) وبتطبيق طريقة التحليل المعدلة [3,2]، نحصل على الصيغة

$$\begin{cases} u_0(x) = e^{-x} \\ u_1(x) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2x}) - \int_0^x A_0 dt = \int_0^x u_0^2(t) dt = 0 \\ u_{n+1}(x) = - \int_0^x A_n dt, \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (43)$$

ومن ذلك فإنه لكل  $n \geq 2$  باقي المركبات ستكون مساوية للصفر، وبالتالي الحل للمعادلة المعطاة يكون

$$u(x) = e^{-x}. \quad (44)$$

**ثانياً: بتطبيق طريقة HPM المعدلة:**

تقوم ببناء الهوموتوبي

$$\left\{ (1-p) \left( u(x) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( u(x) - e^{-x} - \frac{1}{2}(1 - e^{-2x}) + \int_0^x u^2(t) dt \right) \right. \\ \left. = 0 \right. \quad (45)$$

بالتعويض عن المعادلة (18) في المعادلة (45)، ومساواة معاملات  $p$  ذات القوى المتشابهة نحصل على الصيغ التالية:

$$\begin{cases} p^0: u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\ p^1: u_1(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + e^{-x} \frac{1}{2}(1 - e^{-2x}) - \int_0^x u_0^2(t) dt, \\ p^j: u_j(x) = \int_0^x \sum_{k=0}^{j-1} u_k(t) u_{j-k-1}(t) dt \quad \forall j \geq 2. \end{cases}$$

بالتعويض عن قيمة  $u_0$  في المركبة  $u_1$  واستبدال الدالتين  $e^{-x}$  و  $e^{-2x}$  بمتسلسلي تايلور المناظرة لهما كما يلي



$$\begin{cases} u_1(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^n}{n!} \\ + \int_0^x (a_0^2 + 2a_0 a_1 t + (2a_0 a_2 + a_1^2) t^2 + \dots) dt, \end{cases}$$

الآن، بوضع  $u_1 = 0$  وإجراء التكامل الناتج، نحصل على

$$\begin{cases} -a_0 + 1 + (-a_1 - a_0^2)x + \left(-a_2 - \frac{1}{2} - a_0 a_1\right)x^2 + \left(-a_3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}(2a_0 a_2 + a_1^2)\right)x^3 \\ + \left(-a_4 - \frac{7}{24} - \frac{1}{4}(2a_0 a_3 + 2a_1 a_2)\right)x^4 + \dots = 0 \end{cases} \quad (46)$$

وبالتالي ينتج أن باقي المركبات  $u_j = 0$  لكل  $j \geq 2$ . المتسلسلة (46) متسلسلة قوى مساوية للصفر بالتالي المعاملات كلها اصفار ومن ذلك نتحصل على

$$a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = -\frac{1}{6}, a_4 = \frac{1}{24}, \dots$$

بالتعويض عن هذه المعاملات في المركبة الصفرية  $u_0$  نتحصل على الحل للمعادلة المعطاة (41) على الصورة:

$$u(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \dots,$$

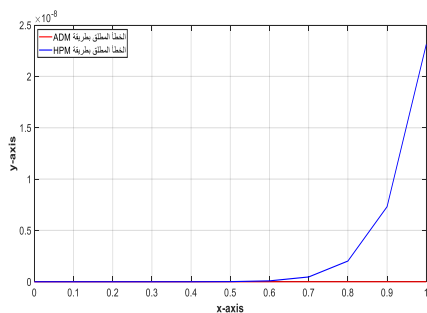
والذي يمكن وضعه في الصورة المغلقة:

$$u(x) = u_0(x) = e^{-x}. \quad (47)$$

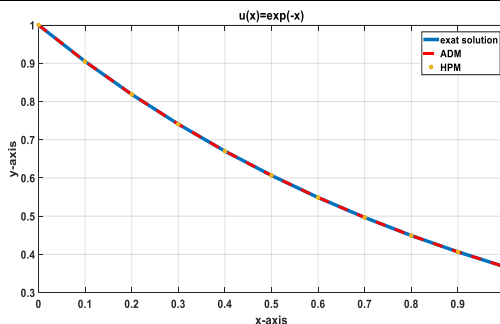
ليبان مدى تقارب ADM و HPM المعدلة وفعاليتهم، جدول 3. يتضمن مقارنة الحل الفعلي بالحلول التقريبية الناتجة. في هذا المثال، تم اخذ الحدود العشرة الأولى في متسلسلة الحل المتحصل عليها بتطبيق طريقة HPM أما طريقة ADM فتم التعويض في الحل الدقيق المتحصل عليه من التقريب الأول:

جدول 3: الخطأ المطلق الناتج من مقارنة الحل الفعلي بالحلول التقريبية المتحصل عليها للمثال 3

x	الحل الفعلي	حل ADM	حل HPM المعدلة	الخطأ المطلق	
	$u(x) = e^{-x}$			ADM	mHPM
0	1.0000000000000000	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0	0
0.1	0.904837418035960	0.904837418035960	0.904837418035960	0	$1.110223 \times e^{-16}$
0.2	0.818730753077982	0.818730753077982	0.818730753077982	0	$5.551115 \times e^{-16}$
0.3	0.740818220681718	0.740818220681718	0.740818220681718	0	$4.329870 \times e^{-14}$
0.4	0.670320046035639	0.670320046035639	0.670320046035639	0	$1.016631 \times e^{-12}$
0.5	0.606530659712633	0.606530659712633	0.606530659724375	0	$1.174161 \times e^{-11}$
0.6	0.548811636094027	0.548811636094027	0.548811636180571	0	$8.654488 \times e^{-11}$
0.7	0.496585303791410	0.496585303791410	0.496585304259357	0	$4.679476 \times e^{-10}$
0.8	0.449328964117222	0.449328964117222	0.449328966134067	0	$2.016845 \times e^{-9}$
0.9	0.406569659740599	0.406569659740599	0.406569667050940	0	$7.3103407 \times e^{-9}$
1	0.367879441171442	0.367879441171442	0.367879464285714	0	$2.3114272 \times e^{-8}$



شكل 6: مقارنة الخطأ المطلق



شكل 5: مقارنة الحل الفعلي بالحلول التقريبية الناتجة

نلاحظ في المثال 3 الحصول على الحل الفعلي من التقريب الأول في طريقة ADM وذلك بالاستفادة من طريقة ADM المعدلة، أما عند تطبيق طريقة HPM تحصلنا على حل تقريبي يتقارب لي الحل الفعلي من التقريب الأول. الشكل 5 يوضح تمثيل الحلول المتحصل عليها من ADM و HPM المعدلة والحل الفعلي، كما يوضح الشكل 6 تمثيل مقدار الخطأ المطلق الناتج من مقارنة الحل الفعلي بالحلول التقريبية المتحصل.

### النتائج:

يوصي بتطبيق طريقة ADM و طريقة هوموتوبي الاضطراب المعدلة HPM، لحل بعض المعادلات التكاملية غير الخطية، مثل معادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية من النوع الثاني، فمن الملاحظ أن هاتين الطريقتين تعتبران فعالتان، وذلك لأنهما تعلمان على حل عدد كبير من المعادلات التكاملية غير الخطية من النوع الثاني، دون اللجوء إلى العملية الخطية بأسلوب سهل، وفي حالة عدم الدراية بالحل الفعلي فهي تعطي حل تقريبي لمثل هذه المعادلات، وقد لاحظنا من خلال تطبيق هاتين الطريقتين أنه في حالة وجود الحل الفعلي للمعادلة المدروسة فإنها تعطينا حلاً في حدود متسلسلة تقارب إلى الحل الفعلي.

المراجع:

- [1] A. J. Jerri, *Introduction to Integral Equations with Applications*, John Wiley and sons, INC, (1999).
- [2] A. Wazwaz, *A First Course in Integral Equations*, (second edition), World Scientific Publishing. Co. Pte. Ltd, (2015).
- [3] A. Wazwas, *Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications*, Springer Heidelberg, Dordrecht London, (2011).
- [4] E. Hetmaniok, D. Slota, A. Wrobel, A. Zielonka, *Application of Homotopy Perturbation Method for Systems of Volterra Integral Equations*, *Matematyka Stosowan*, 5 (2015), 72-77.
- [5] G. Adomian, *Solving Frontier Problems of Physics: The decomposition method*, Kluwer, (1994).
- [6] G. Adomian, and R. Rach, *Noise terms in decomposition series solution*, *Computers Math. Appl.*, 24 (11), (1992) 61-64.
- [7] H. Aminikhah, J. Biazar, *A new analytical method for solving systems of Volterra integral equations*, *International Journal of Computer Mathematics*, 87 (5) (2010), 1142- 1157.
- [8] H. Jafari, M. Alipour and H. Tajadodi, *Convergence of Homotopy Perturbation Method for Solving Integral Equations*, *Thai Journal of Mathematic*, 8 (2010), 511-520.
- [9] J. Biazar, H. Ebrahimi, *Existence and uniqueness of the solution of nonlinear systems of Volterra integral equations of the second kind*, *Journal of Nature science and sustainable technology*, 5 (3), (2011), 150-161.
- [10] J. Biazar, H. Ghazvini, *He's homotopy perturbation method for solving system of Volterra integral equations of the second kind*, *Chaos Solitons Fractals*. 39(2) (2009) 770-777.
- [11] J. Biazar, M. Eslami, H. Aminikhah, *Application of homotopy perturbation method for systems of Volterra integral equations of the first kind*, *Chaos Solitons Fractals*. 42(5) (2009) 3020-3026.
- [12] J. Biazar, M. Eslami, *Modified HPM for solving systems of Volterra integral equations of the second kind*, *Journal of King Saud University (science)*, 23 (2011), 35-39.
- [13] J. Lin Li, *Adomian's decomposition method and homotopy perturbation method in solving nonlinear equations*, *Journal of computational and Applied Mathematics*, 228(2009),168-173.
- [14] M.S. Ahamed, M. Kamrul Hasan and M. S. Alam, *A new approach to homotopy perturbation method for solving systems of Volterra integral equations of first kind*, *AJMCSR*. 10 (3)(2017) 18-23.
- [15] P. J. Hilton, *An Introduction to Homotopy theory*, Combridge University Press, Combridge (1953).
- [16] R. Kanwal, *Linear Integral Equations, Theory and Technique*, Academic Press, New York, (1971).
- [17] S. Liao, *Homotopy Analysis method in Nonlinear Differential equations*, Springer Heidelberg, Dordrecht London, (2012).
- [18] Y. Cherruault, G. Saccomandi, B. Some, *New Results for Convergence of Adomian's Method Applied to Integral Equations*, *Math. Comp. Modell*. 16 (2) (1992), 83-93.