# حـول دالـة جـامـا

د. أحمد علي الواكشي
كليـة العلوم – جامعـة مصراتـة

**المقدمـة:**

تواجه الطالب مواقف صعبة للوصول إلى حلول بعض المسائل في التكاملات الرياضية والتي يصعب حلها بالطرق المعروفة وقد يتعذر أحياناً، وعليه سوف نوضح طرق استخدام دالة جاما لحل مثل هذه المسائل الرياضية وعلاقتها بدالة بيتا والدوال فوق الهندسية، ولدالة جاما تطبيقات عدة بمجال الرياضيات الفيزيائية والهندسية ومجالات أخرى وهي إحدى الدوال المهمّة التي تعتبر أساسية في دراستنا لهذا البحث.

**(1.1) The Gamma function دالة جاما:**

عرف أويلر دالة جاما أولاً ثم استخدم الرمز $\Gamma(z)$ العالم ليجندر، وتستخدم دالة جاما في حساب بعض التكاملات المعقدة، وهناك تعريفات متكافئة لدالة جاما.

**تعريفات دالة جاما وخواصها:**

هناك على الأقل ثلاث تعريفات متكافئة لدالة جاما، نعطي التعريف، ثم نستنتج النتائج المباشرة لهذا التعريف.

**تعريف (1.1.1):**

دالة جاما هي:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{z}}{z(z+1)(z+2)\Lambda(z+n)} \qquad (1)$$

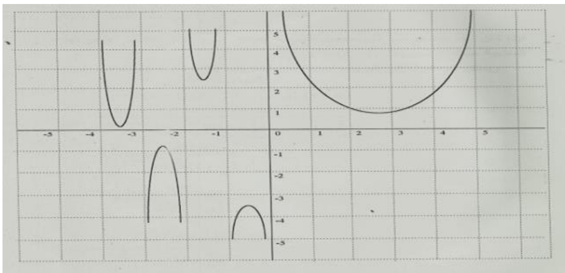
هذه النهاية موجودة بشرط أنّ $z\neq 0$ أو أي عدد صحيح سالب.

من المعادلة (1) نلاحظ أنّ $\Gamma(z)\to\infty$ كلما $z\to 0$ أو z يؤول إلى أي عدد صحيح ســـالب، وفي هذه الحالة، فإن:

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=0$$

الشكل التالي يوضح أنّ $\Gamma(z)$ لها خطوط تقارب عمودية عند $z=0,-1,-2,\Lambda$ من التعريف (1.2.1) نلاحظ أن:

$$\Gamma(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$



الشكل يوضح سلوك دالة جاما

إذا وضعنا $z+1$ بدلاً من z في التعريف (1) نحصل على:

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \lim_{n\to\infty}\frac{n!\;n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\Lambda(z+n+1)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!\;n^{z}}{z(z+1)(z+2)\Lambda(z+n)}\cdot\frac{nz}{z+n+1}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n!\;n^{z}}{z(z+1)(z+2)\Lambda(z+n)}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{nz}{z+n+1}\\
&= \Gamma(z)\,z = z\,\Gamma(z)
\end{aligned}$$

أي أنّ:

$$\Gamma(z+1)=z\,\Gamma(z) \qquad (2)$$

من الواضح أنّ:

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\,\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\,\Gamma(2) = 2\cdot 1 = 2$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(n) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \ldots (n-1) = (n-1)!$$

أي أن:

$$(3) \qquad \Gamma(n) = (n-1)!$$

حيث $n \in N$

التعريف الثاني لدالة جاما يُسمّى بتعريف دالة جاما بدلالة التكامل.

**تعريف (2.1.1):**

التعريف الثاني لدالة جاما بدلالة التكامل هو:

$$(4) \qquad \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$$

يمكن استخدام

$$e^{-t} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$$

وبالتالي يصبح التعريف (1.2.2) على شكل:

$$(5) \qquad \Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\, dt$$

إذا وضعنا $y=\frac{t}{n}$ ، فإن $0\le y\le 1$ و

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1-y)^n (ny)^{z-1}\, n\, dy$$

والتكامل بالتجزئ والتكرار n من المرات يعطينا

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$ حيث $z > 0$

وهذا يكافئ التعريف الأول (1.2.1).

**مثال (1):**

أثبت أنّ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

**الحل:**

من التعريف الثاني (1.2.2) نجد أنّ:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-t}\, t^{\frac{1}{2}-1}\, dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-t}\, t^{-\frac{1}{2}}\, dt$$

لنفرض أنّ $t=x^2$ وبالتالي $dt=2x\,dx$ ، وهذا يعني أنّ

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$$

الآن إذا كان

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$$

فإنّ

$$I^2=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)}\, dx\, dy$$

التحويل إلى الشكل القطبي يعطي:

$$I^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\, e^{-r^2}\Big|_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\,(-1)\,\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

إذن:

$$I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

وبالتالي:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$$

**مثال (2):**

أوجد $\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right)$

**الحل:**

باستخدام العلاقة:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

$$z = \frac{-1}{2}$$

نجد أنّ:

$$\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ \Gamma\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{-1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$$

**مثال (3):**

أوجد $\int_0^\infty \sqrt{x}\ .e^{-x^3}\ dx$

**الحل:**

أولاً نجعلها على الصورة:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\ (t)^{z-1}\ dt$$

نفرض أن $y=x^3$

$$dy=3x^2\ dx$$

$$dx=\frac{dy}{3x^2}$$

$$x = y^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x^2 = (y^{\frac{1}{3}})^2$$

الآن:

$$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} . e^{-x^3} \; dx = \int_0^\infty (y^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} . e^{-y} . \frac{dy}{3y^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^\infty y^{\frac{1}{6}-\frac{2}{3}} e^{-y} \; dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}} . e^{-y} \; dy$$

بالمقارنة بصورة:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-y} . y^{z-1} \; dy$$

نجد أن $z-1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow z = \frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}\int_0^\infty e^{-y} . y^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$\int_0^\infty \sqrt{x} \; . \; e^{-x^3} \; dx = \frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

**نظرية (3.1.1):**

إذا كانت لدينا زاوية مقاسة بالتقدير الدائري فإنّ:

$$\boxed{\Gamma(z).\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}}$$

**الإثبات:**

من تعريف جاما:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \, n^z}{z(z+1)\,(z+2)...(z+n)} \quad \to (1)$$

نفرض أن $1-z \to z$

$$\Gamma(1-z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \, n^{(1-z)}}{(1-z)\,(2-z)(3-z)...(n+1-z)} \quad \to (2)$$

بضرب 1 * 2 نجد أنّ:

$$\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{z}.n!n^{(1-z)}}{z(z+1)\,(z+2)...(z+n)(1-z)(2-z)...(n+1-z)}$$

$$=\frac{1}{z}\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2.n}{(1^2-z^2)\,(2^2-z^2)(3^2-z^2)...(n^2-z^2)(n+1-z)}$$

$$=\frac{1}{z}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n!)^2}{(n!)^2}.n}{\frac{(1^2-z^2)\,(2^2-z^2)(3^2-z^2)...(n^2-z^2)(n+1-z)}{(n!)^2}}$$

$$=\frac{1}{z}\lim_{n\to\infty}\frac{.n}{(1-(\frac{z}{1})^2)\,(1-(\frac{z}{2})^2)(1-(\frac{z}{3})^2)...(1-(\frac{z}{n})^2)(n+1-z)}$$

$$=\frac{1}{z}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1-(\frac{z}{1})^2)\,(1-(\frac{z}{2})^2)(1-(\frac{z}{3})^2)...(1-(\frac{z}{n})^2)}.\lim\frac{n}{n+1-z}$$

$$=\frac{1}{z}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1-(\frac{z}{1})^2)\,(1-(\frac{z}{2})^2)(1-(\frac{z}{3})^2)...(1-(\frac{z}{n})^2)}$$

$$\therefore\Gamma(z).\Gamma(1-z)=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{1-(\frac{z}{n})^2}\right\}$$

$$\therefore\Gamma(z).\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

**مثال (4):**

**وضّح أنّ:**

$$\Gamma(\frac{1}{2}-n)\Gamma(\frac{1}{2}+n)=(-1)^n\,\pi$$

**الحل:**

نعلم أنّ:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

نضع $z=\frac{1}{2}-n$

$$\therefore\ \Gamma)\frac{1}{2}-ى(.\Gamma(1-(\frac{1}{2}-n))=\frac{\pi}{\sin(\frac{1}{2}-n)\pi}$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}-n)\Gamma(\frac{1}{2}+n)=\frac{\pi}{\sin(\frac{1}{2}-n)\pi}$$

ومن خلال المتطابقة الحسابية:

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

ينتج أنّ:

$$\sin(\frac{1}{2}-n)\pi=(-1)^n$$

$$\therefore\Gamma(\frac{1}{2}-n)\ \Gamma(\frac{1}{2}+n)=\frac{\pi}{(-1)^n}=(-1)^n\pi$$

**نظرية (4.1.1):**

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{n^z\,\Gamma(n)}{\Gamma(z+n)}=1$$

**الإثبات:**

باستخدام التعريف الآتي:

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)(z+2)...(z+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\Gamma(n).n^z}{z(z+1)(z+2)...(z+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n).n^z\ .n.(z+n+1)}{(n+z+1)(n+z)(n+z-1)...(z+1)z}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n).n^z\ .n.z(z-1)(z-2)...}{(z+n)(z+n-1)...(z+1)(z).(z-1)(z-2)...}$$

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n).n^z.n}{(z+n)(z+n-1)...(z-1)(z-2)}$$

$$\Gamma(z)=\Gamma(z)\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\Gamma(n).n^z\ .n}{\Gamma(n+z+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n.\Gamma(n).n^{z}}{(n+z)\Gamma(n+z)}$$

$$1= \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n).n^{z}}{\Gamma(n+z)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+z}$$

$$1= \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n).n^{z}}{\Gamma(n+z)}.1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n).n^{z}}{\Gamma(n+z)}=1$$

**نظرية (5.1.1):**

إذا كانت $n\in N$ عدداً صحيحاً موجباً فإنّ:

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^{n}}\left[(2n-1)(2n-3)...(3)(1)\sqrt{\pi}\right]$$

الإثبات:

من المتطابقة:

$$\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)$$

بوضع:

$$(n+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(2n+1)$$

فإنّ:

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\left(\frac{2n+1}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}-1\right)$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{2n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2n-3}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-3}{2}\right)\left(\frac{2n-5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2n-5}{5}\right)$$

$$\vdots$$

$$=\left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-3}{2}\right)\left(\frac{2n-5}{2}\right)..(3)(1)\ \Gamma(\frac{1}{2})$$

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^{n}}\left[(2n-1)(2n-3)(2n-5)...(3)(1)\sqrt{\pi}\right]$$

**نظرية (6.1.1):**

إذا كانت $n \in N$ فإنّ:

$$\Gamma(n-\frac{1}{2})=\frac{1}{2^{n-1}}\left[(2n-3)(2n-5)...(3)(1)\sqrt{\pi}\right]$$

**الإثبات:**

نضع $\Gamma(n+\frac{1}{2})$ في صورة مكافئة:

$$\Gamma(n+\frac{1}{2})=\Gamma(n-\frac{1}{2}+1)=\Gamma(m+1)$$
$$=m\Gamma(m)$$
$$=(n-\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2})$$
$$=\left(\frac{2n-1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)$$

**من النظرية (3.1.1):**

$$\Gamma(n-\frac{1}{2})=\frac{2}{2n-1}\Gamma(n+\frac{1}{2})$$
$$=\frac{2}{2n-1}\left[(2n-1)(2n-3)...(3)(1)\sqrt{\pi}\right]\frac{1}{2^n}$$
$$\Gamma(n-\frac{1}{2})=\frac{1}{2^{n-1}}\left[(2n-3)(2n-5)...(3)(1)\sqrt{\pi}\right]$$

**مثال (5):**

إذا كانت $n\in N$ أثبت أنّ:

$$\Gamma(n+\frac{3}{2})=\frac{1}{2^{n+1}}\left[(2n+1)(2n-1)(2n-3)...(3)(1)\sqrt{\pi}\right]$$

**الإثبات:**

نضع $\Gamma(n+\frac{3}{2})$ في صورة مكافئة:

$$\Gamma(n+\frac{3}{2})=\Gamma(n+\frac{1}{2}+1)=\Gamma(m+1)$$
$$=m\Gamma(m)$$
$$=(n+\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})$$
$$=\left(\frac{2n+1}{2}\right)\Gamma(n+\frac{1}{2})$$

ومن النظرية (1.1) نجد أنّ:

$$\Gamma(n+\frac{3}{2}) = \frac{2n+1}{2}\left[(2n-1)(2n-3)...(3)(1)\sqrt{\pi}\right]\frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left[(2n+1)(2n-1)...(3)(1)\sqrt{\pi}\right]$$

**مثال (6):**

**أثبت أنّ**

$$(2n)! = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}}\cdot(n!)\cdot\Gamma(n+\frac{1}{2})$$

**الإثبات:**

$$(2n)! = 2n.(2n-1)(2n-2)(2n-3)...5\times4\times3\times2\times1$$

$$=2(n).2(n-\frac{1}{2}).2(n-1).2(n-\frac{3}{2}).2(n-2)...2(\frac{5}{2}).2(2).2(\frac{3}{2}).2(1).2(\frac{1}{2})$$

$$= 2^{2n}.n(n-1)(n-2)(n-3)...3\times2\times1.(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\ (n-\frac{5}{2})(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})$$

$$= \frac{2^{2n}.n!(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})...\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\frac{-1}{2}.\frac{-3}{2}.\frac{-5}{2}...}{(\frac{-1}{2})(\frac{-3}{2})(\frac{-5}{2})...}$$

$$=\frac{2^{2n}.n!.\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

$$\therefore\ (2n)! = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}}.(n!).\Gamma(n+\frac{1}{2})$$

**مثال (7):**

**أوجد ما تساويه! (8) بطريقتين مختلفتين؟**

**الحل:**

- الطريقة الأولى:

$$8!=8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$$

- الطريقة الثانية باستخدام النظرية:

من خلال النظرية السابقة نضع $8=2n$

$$\therefore\ n = \frac{8}{2} = 4$$

$$(2n)! = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}}.n!.\Gamma(n+\frac{1}{2})$$

$$n=4 \quad \Rightarrow \quad 2n=8$$

$$\therefore\ (2\times 4)! = \frac{2^{8}}{\sqrt{\pi}}.(4)!\Gamma(\frac{9}{2})$$

$$(8)! = \frac{2^{8}}{\sqrt{\pi}}.4\times 3\times 2\times 1.\frac{7}{2}.\frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma(\frac{1}{2})$$

$$= \frac{2^{4}.2^{4}}{\sqrt{\pi}}\times 4\times 3\times 2\times 1\times 7\times 5\times 3\frac{1}{2^{4}}\Gamma(\frac{1}{2})$$

$$= \frac{2^{4}}{\sqrt{\pi}}\times 4\times 3\times 2\times 1\times 7\times 5\times 3\sqrt{\pi}$$

$$= 2^{4}\times 4\times 3\times 2\times 1\times 7\times 5\times 3$$

$$= 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1\times 2^{3}$$

$$= 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 8!$$

**التعريف الثالث لدالة جاما بدلالة الضرب اللانهائي:**

**تعريف (7.1.1):**

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\ e^{\lambda x} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \qquad (6)$$

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)$$

حيث $\lambda$ يسمى ثابت أويلر ويساوي 0.577216

نستطيع توضيح أن التعريف (1.2.1) يكافئ التعريف (1.2.3).

لاحظ أنّ

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x(x+1)\Lambda\ (x+n)}{n!\ n^{x}}$$

$$= x \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{x}} \frac{(x+1)(x+2)\Lambda\ (x+n)}{1\cdot 2\cdot 3\ \Lambda\ n}$$

$$= x \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{x}} \left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\Lambda \left(1+\frac{x}{n}\right)$$

$$= x \lim_{n\to\infty} n^{-x} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{x}{k}\right)$$

الآن $n^{-x} = e^{-x \ln n}$

و

$$\prod_{k=1}^{\infty} e^{\frac{-x}{k}} = \lim_{n\to\infty} e^{-x}\ e^{\frac{-x}{2}}\ \Lambda\ e^{\frac{-x}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{-x\left(1+\frac{1}{2}+\Lambda+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{-x\left(1+\frac{1}{2}+\Lambda+\frac{1}{n}-\ln n\right)}\ e^{-x\ln n}$$

$$= e^{-\lambda x} \lim_{n\to\infty} e^{-x\ln n}$$

وهذا يعني أنّ:

$$\lim_{n\to\infty} n^{-x} = e^{\lambda x} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{-x}{k}} \qquad (7)$$

بالرجوع والتعويض بالمعادلة (7) نجد أنّ:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\ e^{\lambda x} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{x}{k}} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{x}{k}\right)$$

$$= x\ e^{\lambda x} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{x}{k}} \left(1+\frac{x}{k}\right)$$

$$= x\ e^{\lambda x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$$

وهذا يعني أن التعريف الأول (1.2.1) يكافئ التعريف الثالث (1.2.3).

**مثال (8):**

**إذا علم أنّ**

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right)$$

فوضّح أنّ

$$\Gamma(x)\,\Gamma(-x)=\frac{-\pi}{x \sin(\pi x)}$$

الحل: إذا استخدمنا التعريف (1.2.3) لدالة جاما، فإنّ:

$$\frac{1}{\Gamma(-x)}=(-x)\,e^{-\lambda x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}}$$

إذن:

$$\frac{1}{\Gamma(x)\,\Gamma(-x)}=-x^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}}$$

$$=-x^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

إذا وضعنا $\pi x$ بدلاً من x في المتطابقة المعطاة، فإنّ:

$$\text{Sin}\,(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

إذن:

$$\frac{1}{\Gamma(x)\,\Gamma(-x)}=-x^2\,\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

والذي يعني أنّ

$$\Gamma(x)\,\Gamma(-x)=-\frac{\pi}{x\sin(\pi x)} \qquad (8)$$

يشترط أن x لا تكون عدد صحيحاً.

**مثال (9):**

**وضّح أنّ:**

$$2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1}\, dt=\Gamma(z)$$

**الحل:**

لنفرض أنّ:

$r=t^2$ وهذا يعني أنّ $0\le r<\infty$ و $dr=2t\,dt$ الآن:

$$2\int_0^\infty e^{-t^2}\ t^{2z-1}\ dt$$

$$=2\int_0^\infty e^{-t^2}\ t^{2(z-2)}.t\ dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-2}.2t.dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-r}\ .r^{z-1}\ dr\ =\ \Gamma(z)$$

:

أثبت أنّ:

$$\frac{\Gamma(x).\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\theta.\sin^{2y-1}\theta\ d\theta$$

الإثبات:

$$\Gamma(x)=2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2x-1}\ dt$$

$$\Gamma(y)\ =\ 2\int_0^\infty e^{-s^2} s^{2y-1}\ ds$$

$$\therefore\ \Gamma(x).\Gamma(y)\ =\ 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(t^2+s^2)} t^{2x-1} s^{2y-1}\, ds\, dt$$

حيث إنّ:

$$\left\{ (t,s)/0\le t\le\infty, 0\le s\le\infty \right\}$$

*or*

$$\left\{ (r\cos\theta, r\sin\theta/0\le r\le\infty, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\Gamma(x).\Gamma(y)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)}.(r\cos\theta)^{2x-1}.(r\sin\theta)^{2y-1}.rdr\,d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2}.r^{2(x+y)-1}.\cos^{2x-1}\theta.\sin^{2y-1}\theta dr\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\theta\,\sin^{2y-1}\theta\,d\theta.2\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r^{2(x+y)-1}\,dr$$

$$\Gamma(x).\Gamma(y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\theta.\sin^{2y-1}\theta d\theta\;\Gamma(x+y)$$

$$\therefore\;\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\theta\,\sin^{2y-1}\theta\,d\theta$$

**تعريف (8.1.1):**

تعرف صيغة لاجندر الثنائية لدالة جاما بالعلاقة التالية:

$$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}.\Gamma(z).\Gamma(z+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}$$

**مثال (10):**

أثبت أنّ:

$$2\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}-\frac{\Gamma'(z+\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})}=2\log 2$$

**الحل:**

من صيغة لاجندر الثنائية لدالة جاما نجد أنّ:

$$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}.\Gamma(z).\Gamma(z+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}$$

وبأخذ اللوغاريتم الطرفين:

$$\log\Gamma(2z)=(2z-1)\log 2+\log\Gamma(z)+\log\Gamma(z+\frac{1}{2})-\log\sqrt{\pi}$$

والآن بالتفاضل بالنسبة لـــ z:

$$\frac{2}{\Gamma(2z)}\Gamma'(2z) = 2\log 2 + \frac{1}{\Gamma(z)}\Gamma'(z) + \frac{1}{\Gamma(z+\frac{1}{2})}\Gamma'(z+\frac{1}{2}) + 0$$

$$2\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)} - \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} - \frac{\Gamma'(z+\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})} = 2\log 2$$

وباستخدام المثال السابق يمكن إثبات أنّ:

$$\Gamma'(1/2)=-\sqrt{\pi}\quad(\gamma+2\log 2)$$

من المثال السابق نعلم أنّ:

$$2\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}-\frac{\Gamma'(z+\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})}=2\log 2$$

بوضع:

Z=1/2

$$2\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'(1/2)}{\Gamma(1/2)} - \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = 2\log 2$$

$$2\Gamma'(1)-\frac{\Gamma'(1/2)}{\sqrt{\pi}}-\Gamma'(1)=2\log 2$$

$$\Gamma'(1)-\frac{\Gamma'(1/2)}{\sqrt{\pi}}=2\log 2$$

$$-\gamma-\frac{\Gamma'(1/2)}{\sqrt{\pi}}=2\log 2$$

$$\frac{\Gamma'(1/2)}{\sqrt{\pi}}=-\gamma-2\log 2$$

$$\Gamma'(1/2) = -\sqrt{\pi}\,(\gamma + 2\log 2)$$

**مثال (11):**

**أثبت أنّ:**

$$\Gamma(z)=\frac{(-1)^m.\sqrt{\pi}\ .\ 2^m}{1.3.5...(2m-1)}$$

**الإثبات:**

$$\Gamma(z+m)=(z+m-1)(z+m-2)(z+m-3)...(z+1)\Gamma(z)$$

$$\Gamma(z+m)=(\left[z+m\right]-1)(\left[z+m\right]-2)...(\left[m+z\right]-\left[m-1\right](m+z)-m)(\left[m+z\right]-(m+1))$$

$$=(m+z-1)(m+z-2)...(m+z-m+1)(m+z-m)(m+z-m-1)...$$

$$=(m+z-1)(m+z-2)...(z+1)(z)(z-1)(z-2)...$$

$$=(m+z-1)(m+z-2)...(z+1)(z)\Gamma(z)$$

$$\therefore\ \Gamma(z+m)=(z+m-1)(z+m-2)(z+m-3)...(z+1).z.\Gamma(z)$$

$$\therefore\ \Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+m)}{(z+m-1)(z+m-2)...(z+1).(z)}$$

**بوضع:**

$$z+m=\frac{1}{2}$$

$$z=\frac{1}{2}-m\quad,\quad z+1=\frac{1}{2}-m+1$$

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(1/2)}{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)...\left(\frac{-1}{2}\right)(2m-3)\left(\frac{-1}{2}\right)(2m-1)}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\left(\frac{-1}{2}\right)^{m}(1)(3)(5)(7)...(2m-1)}$$

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^{m}=\frac{(-1)^{m}}{2^{m}}$$

$$\therefore\ \Gamma(z)=\frac{(-1)^{m}.2^{m}.\sqrt{\pi}}{1.3.5...(2m-1)}$$

**نظرية (9.1.1):**

إذا كانت $n\in N$ فإنّ:

$$\int_{0}^{\infty}e^{-x^{n}}\ \sqrt[m]{x}\ dx=\frac{1}{n}.\Gamma\left(\frac{m+1}{n.m}\right)$$

**الإثبات:**

بوضع $y=x^{n}\Rightarrow dy=nx^{n-1}\ dx$

$$dx=\frac{dy}{nx^{n-1}}$$

$$x=y^{\frac{1}{n}}$$

$$=\int_0^\infty e^{-x^n}\sqrt[m]{x}\ dx=\int_0^\infty e^{-x^n}x^{\frac{1}{m}}dx$$

$$=\int_0^\infty e^{-y}.(y^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}.\frac{dy}{n(y^{\frac{1}{n}})^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-y}.y^{\frac{1}{n.m}}.y^{-\frac{1}{n}(n-1)}.dy$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-y}.y^{\frac{1}{n.m}-1+\frac{1}{n}}\ dy$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-y}.y^{\frac{1}{nm}+\frac{1}{n}-1}\ dy$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-y}.y^{\frac{1+m}{nm}-1}\ dy$$

من تعريف $\Gamma(z)$ نجد أنّ:

$$z=\frac{1+m}{nm}$$

$$\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-y}.y^{\frac{1+m}{nm}-1}\ dy=\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-y}.y^{z-1}\ dy$$

$$=\frac{1}{n}\Gamma(z)=\frac{1}{n}\Gamma(\frac{1+m}{nm})$$

**مثال (12):**

أوجد $\int_0^\infty e^{-x^2}\sqrt[3]{x}\ dx$

**الحل:**

نعلم أنّ:

$$\int_0^\infty e^{-x^n}\sqrt[m]{x}\,dx=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{nm}\right)$$

وبالمقارنة نجد أنّ:

$$n=2 \quad , \quad m=3$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-x^2}\sqrt[3]{x}\,dx=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{4}{6}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$$

**مثال (13):**

أثبت أنّ:

$$\int_0^\infty e^{-x^{\left(\frac{1}{34}\right)}}\sqrt[17]{x}\,dx=34\times 35!$$

**الحل:**

نعلم أنّ:

$$\int_0^\infty e^{-x^n}\sqrt[m]{x}\,dx=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{nm}\right)$$

بالمقارنة نجد أنّ:

$$n=\frac{1}{34} \quad , \quad m=17$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-x^{\left(\frac{1}{34}\right)}}\sqrt[17]{x}\,dx=\frac{1}{\frac{1}{34}}\Gamma\left(\frac{17+1}{\left(\frac{1}{34}\right)(17)}\right)$$

$$=34\Gamma\left(\frac{18}{\frac{17}{34}}\right)$$

$$=34\Gamma\left(\frac{18}{\frac{1}{2}}\right)=34\Gamma(36)$$

$$=34\times 35!$$

**مثال (14):**

أثبت أنّ:

$$\int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{8}}}\sqrt[\frac{1}{4}]{x}\,dx=8\times 39!$$

**الحل:**

نعلم أنّ:

$$\int_0^\infty e^{-x^n}\sqrt[m]{x}\,dx=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{nm}\right)$$

بالمقارنة نجد أنّ:

$$n=\frac{1}{8}\ ,\ m=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{8}}}\sqrt[\frac{1}{4}]{x}\,dx=\frac{1}{\frac{1}{8}}\Gamma\left(\frac{\frac{1}{4}+1}{(\frac{1}{8})\,(\frac{1}{4})}\right)$$

$$=8\Gamma\left(\frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{32}}\right)=8\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)(32)$$

$$=8\Gamma(40)=8\times 39!$$

**مثال (15):**

**برهن أنّ:**

$$\int_0^\infty t^a\ e^{-bt^c}\ dt=\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{c}\right)}{cb^{\left(\frac{a+1}{c}\right)}}$$

حيث b,a ثابتان موجبان a>-1

**الحل:**

نفرض أنّ:

$$x = bt^{c}$$

$$\therefore t = \frac{x^{\frac{1}{c}}}{b^{\frac{1}{c}}} \quad , \quad t^{c-1} = \frac{x^{\frac{(c-1)}{c}}}{b^{\frac{(c-1)}{c}}}$$

$$t^{a} = \frac{x^{\frac{a}{c}}}{b^{\frac{a}{c}}}$$

$$\frac{1}{t^{c-1}} = \frac{bx^{(\frac{1}{c})-1}}{b^{\frac{1}{c}}}$$

$$dx = cbt^{c-1} \quad dt$$

$$dt = \left[\frac{1}{cb(t^{c-1})}\right] dx$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{(c-1)}}}{cb^{\frac{1}{c}}} \quad dx$$

عندما:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$t = \infty \quad \Rightarrow \quad x = \infty$$

$$\therefore \int_0^\infty t^{a} \; e^{-bt^{c}} \; dt = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{a}{c}} e^{-x}}{b^{\frac{a}{c}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{c-1}}}{cb^{\frac{1}{c}}} \; dx$$

$$= cb^{\frac{1}{\frac{(a+1)}{c}}} \int_0^\infty x^{(\frac{a+1}{c})-1} . e^{-x} \; dx$$

ومن تعريف دالة جاما

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} \; t^{x-1} \; dt$$

وبالمقارنة نجد أنّ:

$$\int_0^\infty x^{\left(\frac{a+1}{c}\right)-1} e^{-x}\, dx = \Gamma\left(\frac{a+1}{c}\right)$$

$$\therefore \int_0^\infty t^a e^{-bt^c}\, dt = \frac{1}{cb^{\left(\frac{a+1}{c}\right)}} .\Gamma\left(\frac{a+1}{c}\right)$$

**مثال (16):**

أثبت أنّ إذا كان n عدد صحيح غير سالب p ثابت موجب فإنّ:

$$\int_0^\infty t^n p^{-1}\, dt = \frac{n!}{(\log_e p)^{n+1}}$$

**الحل:**

نفرض أنّ:

$$\rho^{-1} = (e^{\log_e \rho)})^{-t} = {}^{-(\log_e \rho)^t}$$

$$\therefore \int_0^\infty t^n \rho^{-1}\, dt = \int_0^\infty t^n e^{-(\log_e \rho)^t}\, dt$$

ومن خلال المثال السابق وبتطبيق هذا التكامل عليه وذلك بأخذ a=n و $c=1, b=(\log_e \rho)$ ينتج أنّ:

$$\int_0^\infty t^n p^{-1}\, dt = \frac{\Gamma(n+1)}{(\log_e \rho)^{n+1}} = \frac{n!}{(\log_e \rho)^{n+1}}$$

## (2.1) دالة ديجاما Digamma:

تعرف دالة ديجاما بأنها المشتقة الأولى للوغاريتم الطبيعي لدالة جاما.

$$\psi(x) = \frac{d}{dx}\left(\ln \Gamma(x)\right) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

حيث $x \neq 0, -1, -2, \Lambda$

من المفيد إيجاد الشكل السلسلي لدالة ديجاما $\psi(x)$.

**مثال (17):**

أثبت أنّ:

$$\psi(x)=-\lambda+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x-1}{(n+1)(n+x)}$$

**الحل:**

من التعريف (1.2.3) وهو التعريف الثالث لدالة جاما نجد أنّ:

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=x\ e^{\lambda x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)\ e^{-\frac{x}{n}}$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين نجد أنّ:

$$-\ln\Gamma(x)=\ln x+\lambda x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right]$$

وبالتالي:

$$\ln\Gamma(x)=-\ln x-\lambda x+\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n}-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right]$$

وبأخذ المشتقة الأولى للطرفين بالنسبة للمتغير x نحصل على:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=-\frac{1}{x}-\lambda+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{(x+n)}\right)$$

وهذا يعني أنّ:

$$\psi(x)=-\lambda+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+x}\right)$$

$$=-\lambda+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x-1}{(n+1)(n+x)}$$

**مثال (18):**

وضح أنّ:

$$n!\,(-n)!=\frac{n\pi}{\sin(n\pi)}$$

**الحل:**

نعلم أنّ

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n!$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin x\pi}$$

بوضع x=n

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\sin n\pi}$$

بضرب الطرفين في n:

$$n\Gamma(n)\Gamma(1-n)=\frac{n\pi}{\sin n\pi}$$

$$n!\,(-n)!=\frac{n\pi}{\sin n\pi}$$

## (3.1) دالة بيتا: (The beta function)

تم التعرف لدالة بيتا بواسطة العالم أويلر سنة 1771 وتم تعريفها كما يلي:

**تعريف (1.3.1):**

إذا كان $x>0$ , $y>0$ ، فإن دالة بيتا تعرف كما يلي:

$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \qquad (9)$$

إذا تم تغيير y , x في التعريف السابق، فإنّ:

$$\beta(y,x)=\int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}\,dt$$

فإذا كان $1-t=u$ ، فإنّ $dt=-du$ ، وبالتالي:

$$\beta(y,x)=-\int_0^1 (1-u)^{y-1}u^{x-1}\,du$$

$$=\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\,du$$

وبالمقارنة مع تعريف (2.1.1) نجد أنّ:

$$=\beta(x,y)$$

هذا يعني أنّ:

$$\boxed{\beta(x,y)=\beta(y,x)}$$

من التعريف (2.1.1)

$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

إذا كان $t=\sin^2\theta$ حيث $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ ، فإنّ:

$$dt=2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

الآن عندما $t\to0$ ، فإنّ $\theta\to0$ ، وعندما $t\to1$ ، فإنّ $\theta\to\frac{\pi}{2}$ ، وبالتالي:

$\beta(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\theta\ \sin^{2y-1}\theta\,d\theta$ **ومن التمرين الذي سبق إثباته نجد أنّ:**

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\theta\ \sin^{2y-1}\theta\,d\theta=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

وهذا يعني أنّ:

$$\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\qquad(10)$$

**مثال (19):**

وضح أنّ

$$\beta(x,y)=\int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt$$

حيث $x>0\ ,\ y>0$ .

**الحل:**

من تعريف دالة بيتا:

$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

حيث $x>0\ ,\ y>0$

إذا فرضنا أنّ $t=\frac{u}{1+u}$ فإنّ:

$$u=\frac{t}{1-t}$$

وبالتالي نجد أنّ كلما تؤول t من 0 إلى 1 ، فإنّ u تؤول من 0 إلى ∞ ، ونلاحظ أنّ:

$$dt=\frac{du}{(1+u)^2}$$

وكذلك نجد أنّ:

$$1-t=\frac{1}{1+u}$$

إذن بالتعويض في:

$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

نجد أنّ:

$$\beta(x,y)=\int_0^\infty \left(\frac{u}{u+1}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{1+u}\right)^{y-1}\frac{du}{(1+u)^2}$$

$$=\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,du$$

إذن:

$$\beta(x,y)=\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt$$

**نظرية (2.3.1):**

$$\beta(np,q)=\frac{1}{n}\int_0^1 x^{p-1}(1-\sqrt[n]{x})^{q-1}\,dx$$

حيث $\mathrm{Re}(p)>0$ , $\mathrm{Re}(q)>0$

$n=1,2,\ldots$

**الإثبات:**

نفرض أنّ:

$$x^{\frac{1}{n}}=y\implies x=y^n$$

$$dy=\frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}\,dx$$

عندما

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

$$x=1 \quad \Rightarrow \quad y=1$$

$$\therefore \int_0^1 x^{p-1}(1-\sqrt[n]{x})^{q-1}dx = \int_0^1 (y^n)^{p-1}(1-y)^{q-1} \frac{dy}{\frac{1}{n}(y^n)^{\frac{(1-n)}{n}}}$$

$$= n\int_0^1 y^{np-n}(1-y)^{q-1} \; y^n \; dy$$

$$= n\int_0^1 y^{np-1}\,(1-y)^{q-1}\; dy$$

$$\therefore \frac{1}{n}\int_0^1 x^{p-1}(1-\sqrt[n]{x})^{q-1}dx = n\beta(np, q)$$

$$= \frac{\Gamma(np)\Gamma(q)}{\Gamma(np+q)}$$

**نظرية (3.3.1):**

$$\int_a^b (x-a)^m\,(b-x)^n dx = (b-a)^{m+n+1}\,\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}$$

حيث $a<b \quad , \quad n,m>1$

**الإثبات:**

نضع

$$(x-a)=(b-a)t$$

$$x=(b-a)t+a$$

$$dx=(b-a)\;dt$$

$$b-a=b-[\,(b-a)t+a\,]$$

$$=(b-a)(1-t)$$

عندما

$$x = a \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

$$x = b \quad \Rightarrow \quad y = 1$$

$$\therefore \int_a^b (x-a)^m \, (b-x)^n \, dx$$

$$= \int_0^1 (b-a)^{m+n+1} t^m \, (1-t)^n \, dt$$

$$= (b-a)^{m+n+1} \int_0^1 t^m \, (1-t)^n \, dt$$

$$= (b-a)^{m+n+1} \, \beta(m+1, n+1)$$

$$= (b-a)^{m+n+1} \cdot \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}$$

**مثال (20):**

أثبت أنّ:

$$\beta(p,p).\beta(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2^{4p-1}.p}$$

**الحل:**

$$\beta(p,p).\beta(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}) = \frac{\{\Gamma(p)\}^2}{\Gamma(2p)} \cdot \frac{\left\{\Gamma(p+\frac{1}{2})\right\}^2}{\Gamma(2p+1)}$$

$$= \frac{\{\Gamma(p)\}^2 \cdot \left\{\Gamma(p+\frac{1}{2})\right\}^2}{2p\{\Gamma(2p)\}^2}$$

باستخدام صيغة ليجاندر المضاعفة نحصل على:

$$\beta(p,p).\beta(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2p.2^{4p-2}} = \frac{\pi}{2^{4p}.p}$$

**مثال (21):**

تحقق من أنّ:

$$\beta(a,b) = \beta(a+1,b) + \beta(a,b+1)$$

**الحل:**

$$\beta(a+1,b) = \frac{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)}$$
$$= \frac{a\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{(a+b)\Gamma(a+b)}$$
$$= \frac{a}{a+b}\,\beta(a,b) \quad \ldots (1)$$
$$\beta(a,b+1) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)} = \frac{\Gamma(a)\,b\Gamma(b)}{(a+b)\Gamma(a+b)}$$
$$= \frac{b}{a+b}\,\beta(a,b) \ \ldots \ (2)$$

بجمع (1)، (2) نحصل على:

$$\beta(a+1,b) + \beta(a,b+1) = \frac{a}{a+b}\beta(a,b) + \frac{b}{a+b}\beta(a,b)$$
$$= \beta(a,b)\left[\frac{a+b}{a+b}\right] = \beta(a,b)$$

## (4.1) الدوال فوق الهندسية (The Hypar Geometric series)

وهي من الدوال التي لها أهمية بالمجالات التطبيقية وخصوصاً في الفيزياء:

وتعرف بمتسلسلة من النوع:

$$1+\frac{\alpha\beta}{1!\gamma}.x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2!\gamma(\gamma+1)}\ x^2+\ldots. \qquad (11)$$

وهي تعميم المتسلسلة الهندسية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\ldots.$$

وتسمى بالمتسلسلة فوق الهندسية وهي متقاربة مطلقا لقيمة $|x|<1$ وغير متقاربة عندما $|x|>1$وذلك إذا كانت $\gamma\neq 0$ وليست بعدد صحيح سالب وأيضاً عندما $|x|=1$ تكون المتسلسلة متقاربة تقارباً مطلقاً إذا كان $\alpha+\beta<\gamma$ يمكن تعريف المتسلسلة (11) بصورة أخرى كالتالي:

$$(\alpha)_r = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+r-1)$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)} \ \ldots \qquad (12)$$

فتأخذ الصورة:

$$_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_r\,(\beta)_r}{r!\ \ (\gamma)_r}.x^r$$

والدليل 2 يرمز إلى وجود بارامترين بالبسط بينما الدليل 1 يرمز إلى وجود بارامترات واحد بالمقام.

ونلاحظ أنّ:

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,x) = {}_2F_1(\beta,\alpha,\gamma,x) $$

و ${}_2F_1$ هي دالة فوق هندسية عادية كما نلاحظ أنّ:

$$ \frac{d}{dx}({}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,x)) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{(r-1)!(\gamma)_r} \cdot x^{r-1} $$

$$ = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{r+1}(\beta)_{r+1}}{r!(\gamma)_{r+1}} $$

أي أنّ:

$$ (\alpha)_{r+1} = \frac{\Gamma(\alpha+r+1)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+r) $$

$$ = \alpha(\alpha+1)_r $$

$$ \frac{d}{dx}({}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,x)) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_r\ (\beta+1)r}{r!(\gamma+1)_r} . x^r $$

$$ = \frac{\alpha\beta}{\gamma}\ {}_2F_1(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x) $$

كما نلاحظ أنّ:

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma\,0) = 1 $$

وبذلك فإنّ:

$$ \frac{d}{dx}({}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,x))\Big|_{x=0} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} $$

كما يمكن التعبير عن الدالة فوق الهندسية بدلالة التكامل كالآتي:

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,x) = \frac{1}{\beta(\beta,\gamma-\beta)} \int_0^1 (1-t)^{\gamma-\beta-1} . (1-xt)^{-\alpha}\ dt $$

وعليه لو وضعنا x=1 نحصل على:

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,1) = \frac{1}{\beta(\beta,\gamma-\beta)} \int_0^1 (1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\ dt $$

$$ = \frac{1}{\beta(\beta,\gamma-\beta)} \{\beta(\beta,\gamma-\alpha-\beta)\} $$

بحيث:

$\gamma-\alpha-\beta>0$ , $\beta>0$ وباستعمال دالة $\Gamma$ نكتب:

$${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha).\Gamma(\gamma-\beta)}$$

**(1.4.1) العلاقة بين دالة جاما والدوال فوق الهندسية:**

من خلال علاقة دالة جاما بدلالة بيتا يمكن الحصول على بعض النظريات الهامة المتعلقة بحلول للدوال فوق الهندسية ومنها:

**نظرية جاوس (Gauss's thaery)**

$${}_2F_1\,(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{\Gamma(\gamma-\alpha,\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}$$

حيث $\gamma-\alpha-\beta>0$ , $\beta>0$

وهذه النظرية تؤدي إلى بعض النظريات الأخرى المتعلقة بالمتسلسلات الهندسية مثل:

**نظرية كومار (Kummar's thaery)**

$${}_2F_1\,(\alpha,\beta,\beta-\alpha+1,-1)=\frac{\Gamma(1+\beta-\alpha)\,\Gamma(1+\frac{1}{2}\beta)}{\Gamma(1+\beta)\,\Gamma(1+\frac{1}{2}\beta-\alpha)}$$

وذلك بوضع $\gamma=\beta-\alpha+1$ وجعل x=1 بدلاً من أخذ الصورة

$${}_2F_1\,(\alpha,\beta,\gamma,x)$$

**مثال (22):**

أوجد الخمس الحدود الأولى في المتسلسلة القوى هندسة التالية:

$${}_2F_1\,(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},x)$$

**الحل:**

$$\Theta\,{}_2F_1\,(\alpha,\beta,\gamma,x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r\,(\beta)_r}{r!\,(\gamma)_r}.\,x^r$$

$$=1+\frac{\alpha\beta}{1!\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}{3!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\beta(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}{4!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)}x^4$$

وبالتعويض عن قيمة $\gamma,\beta,\alpha$ نحصل على:

$$= 1 + \frac{(\frac{1}{2})(1)}{(\frac{1}{2})} x + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)(1)(2)}{(2)(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)} x^2 + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)(1)(2)(3)}{(6)(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)} x^3$$

$$+ \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)(\frac{1}{2}+3)(1)(2)(3)(4)}{(24)(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)(\frac{1}{2}+3)} x^4$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

**مثال (23):**

أثبت أنّ

$$\alpha_{(r+1)} = \alpha(\alpha+1)_r$$

الإثبات:

وكذلك:

$$(\alpha)_{r+1} = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+r-1)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)} \qquad \dots(1')$$

$$\alpha(\alpha+1)_r = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+r)(\alpha+r-1)$$

$$= \frac{\alpha\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)} \qquad \dots(2')$$

من المعادلات السابقة يتضح أن المساواة صحيحة

$$\therefore \alpha_{(r+1)} = \alpha(\alpha+1)_r$$

**الخاتمة:**

في هذا البحث تطرقنا إلى تعاريف دالة جاما وطرق حل المسائل الرياضية التي يصعب حلها بالطرق المعروفة كما وضّحنا علاقة دالة جاما بدالة بيتا والدوال فوق الهندسية والتطرق إلى بعض النظريات الهامة التي تستخدم في حل بعض التكاملات الرياضية وكما ننوّه إلى وجود علاقة بين دالة جاما ودوال بيسل ودالة ليجاندر وغيرها من الدوال الخاصة التي تعتبر مدخلاً لأبحاث أخرى.

# المراجع

1- Bell W.W Special Functions For Scientist and Engiueers Nostr and Company,1968.
2- Farrell and Ross, Solved Problems:Gamma and Beta Functions, 1963,New Yark.
3- George,.E, Richard.A and Ranjan.R . Special Functions, 2004.
4- Snedon I.N Special Functions Of Mathematical Physics,London Longman,1961.
5- Reichel A.M Special Functions Sedney Science Press,1966.
6- Richard Reals, Roderick Wong, Special Functions, A Graduare Text, 2010,Yale University.

7- أحمد الزوام وعمر عاشور بن الونيس ومحمد مختار عريبي، الدوال الخاصة منشورات جامعة الزاوية – ليبيا، 2003.

8- علي محمد عوين، محاضرات في طرق الرياضيات، الطبعة الأولى، 2006.