معادلة بفاف التفاضلية في ثلاثة متغيرات

(مناقشة طرق الحل)

أ. علي محمد المدير*

الملخص

تهدف هذه الورقة البحثية إلى دراسة معادلة بفاف التفاضلية في ثلاثة متغيرات، وشرط قابلية المعادلة للتكامل، وعلاقة التكاملية بالمعادلة التامة، وكذلك إلى مناقشة طرق الحل المختلفة والتي نرى تقسيمها إلى ثلاثة أنواع رئيسة، النوع الأول طرق مباشرة وسهلة تشمل طريقة الفحص وطريقة فصل المتغيرات الثلاثة، وطريقة فصل متغير واحد، ونوع ثان وهى الطرق التي تعتمد على الاختزال والتحويل لشكل ونوع المعادلة ليسهل حلها وتشمل، طريقة المعادلة المتجانسة التي يحولها إلى معادلة تفاضلية فيها متغير واحد مفصول يرجعها إلى النوع الأول، وطريقة الاختزال إلى معادلة تفاضلية عادية في متغيرين بدلا من معادلة تفاضلية في ثلاثة متغيرات، ونوع ثالث وهو الطرق البارمترية، والتي يتم فرض أحد المتغيرات ثابتا، و تحتاج إلى عدة خطوات رياضية وتقنيات تكاملية، وتشمل طريقة ناتاني التي تنتج معادلتين تفاضليتين عاديتين يمكن حلهما، وطريقة الخدعة التي تستخدم فيها التفاضلات الكلية وطريقة البرهان والتي يستخدم خطوات برهان شرط التكافؤ من النظرية التكاملية في الحل.

وبينا أنه ينبغي التدرج في استخدام هذه الطرق والانتقال من الطرق السهلة إلى الصعبة إلى الأكثر صعوبة حسب المعادلة المعطاة.

* قسم الرياضيات – كلية التربية – جامعة مصراتة .

مقدمة:

تحتل المعادلات التفاضلية مكانة مرموقة في كل فروع العلوم التطبيقية والهندسية والفيزيائية.

وتشكل معادلات بفاف التفاضلية أهمية بالغة في مجال التطبيقات الهندسية والفيزيائية والكيمائية والطبية.

وسمّيت بهذا الاسم نسبة لعالم الرياضيات الألماني Johann Friedrich Pfaff (1756–1825) والذي اشتهر بلقب Pfaffians ، كما تسمى معادلة بفاف التفاضلية بالمعادلة التفاضلية الكلية (TOTAL DIFFERENTAIAL EQUATION)، ويرى أكثر المختصين في المعادلات التفاضلية أن لها دوراً أساسيا في المعادلات التفاضلية الجزئية، وتصنف على أنها من المعادلات التفاضلية الجزئية أو من المعادلات التفاضلية العادية في أكثر من متغيرين.

وسنكتفي في هذه الورقة البحثية بدراسة طرق الحل لمعادلة بفاف التفاضلية في ثلاثة متغيرات.

1- تعريف:

التعبير : $\sum_{i=1}^{n} F_i(x_1, x_2, \dots \dots \dots, x_n)dx_i = 0 \qquad (1)$

حيث $F i$ ($i = 1,2,\dots,n$) دوال في عدة متغيرات مستقلة $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

يعرف التعبير (1) بمعادلة بفاف التفاضلية في n من المتغيرات.

وتكتب معادلة بفاف التفاضلية في متغيرين على الصورة التالية:

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ وهى معادلة دائما تمتلك عامل تكاملي [1].

أما معادلة بفاف في ثلاث متغيرات تكتب على الصورة التالية:

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0 \qquad (2)$$

حيث P,Q,R دوال معرفة ومتصلة وقابلة للتفاضل مرتين في منطقة فراغية ما.

ويمكننا كتابة المعادلة (2) في صورة متجه : $\vec{F}\,dv = 0 \qquad (3)$

حيث $F = (P, Q, R),\ dv = (dx, dy, dz) = (P\,i + Q\,j + R\,k)$

نظرية 1 :- الشرط الضروري والكافي لقابلية معادلة بفاف التفاضلية للتكامل هو: $F.\,\mathrm{Curl}\,F = \mathbf{0}$

نظرية 2 :- إذا كانت $\vec{F}\ \mathrm{Curl}\ \vec{F} = 0$. و الدالة μ **دالة اختيارية في المتغيرات** (X,Y,Z) **فإن** $(\mu F).\,\mathrm{Curl}(\mu F) = 0$

نظرية 3 :- توجد علاقة بين الدالتين U(X,Y) **و** V (X,Y) **على الصورة** $\emptyset(U, V) = 0$ لا تشتمل على X أو Y بصورة صريحة إذا كان وفقط إذا كان $\frac{\partial(U,V)}{\partial(X,Y)} = 0$

وهذه النظريات الثلاثة المهمة في موضوع معادلة بفاف التفاضلية وسنكتفي ببرهان النظرية الأولى، وذلك لاستخدام برهانها كأحد طرق الحل لمعادلة بفاف التفاضلية في ثلاثة متغيرات.

2- تكاملية معادلة بفاف التفاضلية:

تكون معادلة بفاف التفاضلية

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0 \qquad (2)$$

قابلة للتكامل (Integrable) أي قابلة للحل (Solvable) إذا أمكن الحصول عليها بمفاضلة الدالة :

$f(x,y,z) = A \qquad (4)$ حيث A ثابت اختياري.

وسنثبت الآن شرط التكاملية للمعادلة (2) (برهان النظرية1)

لنبدأ بمفاضلة المعادلة (4) : $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = dA \equiv 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0 \quad (5)$$

من المعادلتين (5) ، (2) نجد أن :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu P \ , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mu Q \ , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \mu R \qquad (6)$$

حيث $\mu(x,y,z)$ دالة اختيارية. وإذا كانت الدالة $f(x,y,z)$ ومشتقاتها الأولى مستمرة فإن :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \ \text{يؤدى إلى}\ \frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$$

$$\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) + Q\,\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\,\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \qquad (7)$$

وبالمثل نجد أن :

$$\mu\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + R\,\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\,\frac{\partial \mu}{\partial z} = 0 \qquad (8)$$

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + P\,\frac{\partial \mu}{\partial z} - R\,\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \qquad (9)$$

بضرب المعادلة (7) في R و المعادلة (8) في P و المعادلة (9) في Q ، والجمع ثم القسمة على الدالة الاختيارية μ ينتج أن :

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \equiv 0 \quad (10)$$

وهو الشرط الضروري لكون معادلة بفاف التفاضلية (المعادلة التفاضلية الكلية) قابلة للتكامل، ويمكن إعادة كتابة الشرط على صورة محدد:

$$\vec{F}\ \mathrm{Curl}\ \vec{F} = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0. \ (11)$$

حيث إن مؤثر الالتفاف curl F (12) $\text{Curl } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

برهان أن الشرط يكون كافيا: نفرض أن $\vec{F}\ \text{Curl}\ \vec{F} = 0.$

والمطلوب أن المعادلة (2) $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ قابلة للتكامل.

فإذا اعتبرنا المتغير z ثابتاً (dz = 0) فإن المعادلة (2) تصبح على الصورة:

$$P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy = 0$$

ولها حل على الشكل: U(x ,y ,z)= c، حيث c ثابت يمكن ان يشمل z

وبالتالي يجب أن تتوفر دالة μ بحيث $\frac{\partial u}{\partial y} = \mu Q$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \mu P$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية (2) بدلا من P,Q نحصل على:

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \mu R dz = 0 \qquad (13)$$

وبإضافة وطرح $\frac{\partial u}{\partial z}dZ$ من المعادلة التفاضلية السابقة تحصل على:

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dZ + (\mu R - \frac{\partial u}{\partial z})dZ = 0$$

وهذه المعادلة تكافئ: (14) $du + k\, dz = o$ حيث $k = \mu R - \frac{\partial u}{\partial z}$

من الفرض $F.\ \text{Curl } F = 0$ وحسب النظرية (3) $\mu\ F.\ \text{Curl}(\mu\ F) = 0$

$$\mu\ F = (\mu P, \mu Q, \mu R) = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} + K) = \text{grad } U + (o, o, k)$$

بتطبيق مؤثر الالتفاف على طرفي المعادلة: $\text{Curl}(\mu\ F) = (\frac{\partial K}{\partial y}, -\frac{\partial K}{\partial x}, 0)$

$$\mu\ F\ \text{Curl}(\mu\ F) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial K}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\partial(U,K)}{\partial(X,Y)} = 0 \qquad (15)$$

فإن الشرط $F.\ Curl\ F = 0$ يكون مكافئا للعلاقة $\frac{\partial(U,K)}{\partial(X,Y)} = 0$ وهذا يضمن وجود علاقة بين (u, K) لا تحتوى على (x, y) بصورة صريحة (نظرية 2)

أي أن K يعبر عنها كدالة في (U, Z) و التي تحقق المعادلة $k = \mu R - \frac{\partial u}{\partial z}$ (حيث R هي معامل dZ و $\frac{\partial u}{\partial z}$ المشتقة الجزئية بالنسبة للمتغير Z المفروض ثابتا)

و الحل للمعادلة (16) $\frac{du}{dz} + k(u, z) = o$ يكون على الصورة $\varphi(u, z) = 0$

والتعويض عن U بدلالة x, y, z نحصل على الحل في الصورة: (17) $f(X,Y,Z) = 0$

وهو ما يبين أن المعادلة الأصلية تكون قابلة التكامل.

ويمكن استخدام خطوات البرهان للشرط الكافي كطريقة حل لمعادلة بفاف التفاضلية في ثلاثة متغيرات.

3 – معادلة بفاف التفاضلية التامة:

تكون معادلة بفاف التفاضلية (2) $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$ تامة (Exact) إذا أمكن كتابة الطرف الأيسر كتفاضل تام على الصورة :

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = df(x, y, z) \quad (18)$$

وبوضع $\mu = 1$ في المعادلات (7) ، (8) ، (9) نجد أن شرط التمام للمعادلة (2) هو :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}\ ,\ \ \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}\ ,\ \ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad (19)$$

وواضح أن تحقق شرط التمام (19) يتضمن شرط التكاملية (11)، ولكن العكس ليس صحيحا دائماً، فكون المعادلة قابلة للتكامل لا يعني بالضرورة أنها تامة على صورتها الحالية، فمثلاً المعادلة: $\left(2xy + \frac{1}{x^2}\right)dx + x^2dy + \tan z\,dz = 0$ معادلة قابلة للتكامل لأنها تحقق شرط التكاملية وهي في نفس الوقت تامة لأنها أيضاً تحقق شرط التمام، أما المعادلة :

$y^2dx + (3xy + 2z)dy + ydz = 0$ فهي قابلة للتكامل إلا أنها ليست تامة.

وبالتالي فإن معادلة بفاف التفاضلية التامة تضمن تحقق شرط التكاملية، والعكس غير صحيح دائما بمعنى تحقق شرط التكاملية لا يعنى بالضرورة تحقق شرط التمام.

وإن تحقق شرط التمام لمعادلة بفاف التفاضلية في ثلاثة متغيرات يعنى أن الحل يكون عادة مباشرا ولا يحتاج إلى عوامل تكاملية أو طرق حل معقدة، ويتم عن طريق تقسيم الحدود إلى مجموعات، بحيث تكون كل مجموعة تفاضل تام، على أن يحتاج لبعض المهارة والمناورة، أو يتم الحل وفق إحدى الطرق المباشرة.

أما عندما تكون المعادلة غير تامة، فإنها تحتاج لعامل تكاملي يحولها إلى معادلة تامة وعملية البحث عن العامل التكاملي للمعادلة التفاضلية في ثلاثة متغيرات تكون بالتجربة وغير مضمونة ولا توجد قاعدة معينة للحصول عليه، والأفضل أن يتم حلها بإحدى الطرق الأخرى.

4- طـرق الحــل (Methods For Solving) :

بعد أن أخذنا فكرة مبسطة عن معادلة بفاف التفاضلية وبعض النظريات وشرط قابليتها للتكامل وعلاقة التكاملية بالمعادلة التامة، فإننا نشرع في معرفة ومناقشة طرق الحل لها، ولحل معادلة بفاف التفاضلية في ثلاثة متغيرات يجب أن تكون الخطوة الأولى والرئيسة هي اختبار مدى تحقق شرط التكاملية للمعادلة، أي تكون قابلة للتكامل والحل، وبعد التحقق من قابلية المعادلة للتكامل نبحث عن طريقة الحل المناسبة.

وتوجد عدة طرق لإيجاد الحل منها طرق مباشرة، وطرق الاختزال، والطرق البارمترية.

أولا – الطرق المباشرة : وهى الطرق السهلة التي تحتاج إلى بعض المهارة في إجراء التكاملات.

1- طريقة الفحص (Inspection Method):-

بعد التحقق من أن معادلة بفاف التفاضلية قابلة للتكامل، فيمكن تعيين الحل بالملاحظة والفحص مباشرة والحل يكون ضمنيا، وخاصة المعادلة التي يكون فيها $\text{Curl}\vec{F} = 0$ [2]

<u>مثال1</u>: المعادلة التفاضلية $x^2\,dx + y^2\,dy + z^2\,dz= 0$ هي معادلة قابلة للتكامل وتحقق الشرط

$$(\text{Curl}\vec{F} = 0)$$ و حلها يكون بالتكامل: $x^3 + y^3 + z^3 = c$

2- طريـقة فصـل المتغـيرات (Variables Separable Method) :-

معادلة بفاف التفاضلية القابلة للتكامل وإذا أمكن فصلها بعد عدة خطوات رياضية ووضعها على الصورة (20) $P(x)\,dx +Q(y)\,dy + R(z)\,dz = 0$

يمكن حلها على الصورة التالية:(21) $\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy + \int R(z)\,dz = c$

<u>مثـال2</u>: حل المعادلة $xy^2z^2\,dx + x^2yz^2\,dy + x^2y^2z\,dz = 0$

المعادلة قابلة للتكامل وبقسمة طرفي المعادلة على $x^2y^2z^2$ نحصل على: $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0$

المعادلة أصبحت مفصولة في المتغيرات الثلاثة بالتكامل نحصل على الحل : $xyz = c$

3- طريقة متغير واحد قابل للفـصل (One Variable Separable Method):-

نفرض أن معادلة بفاف قابلة للتكامل، وإذا كان أحد المتغيرات الثلاثة (x ,y, z) قابلاً للفصل، وليكن مثلاً z فإن المعادلة تأخذ الصورة :

$$P(x, y)\,dx + Q(x ,y)\,dy + R(z)\,dz = 0 \quad (22)$$

$$\text{Curl } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y) & Q(x,y) & R(z) \end{vmatrix}$$

$$\text{Curl } \overrightarrow{F} = 0\, i - 0\, j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k$$

وحيث إن المعادلة تحقق شرط قابلة للتكامل فإن: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

وهذا يعني أن المقدار $(P\,dx + Q\,dy)$ يكون تفاضلاً تاماً لدالة ما u وهو du

والحل يكون: (23) $\quad u(x,y) + \int R(z)\,dz = c$

<u>مثـال3:</u> حل المعادلة $x(y^2 - a^2)\,dx + y(x^2 - z^2)\,dy - z(y^2 - a^2)\,dz = 0$

المعادلة قابلة للتكامل ويكون حلها بقسمة طرفي المعادلة على $(y^2\ \ a^2)(x^2 - z^2)$

نحصل على: $\frac{x\,dx}{(x^2-z^2)} + \frac{y\,dy}{(y^2-a^2)} - \frac{z\,dz}{(x^2-z^2)} = 0$

أي أن المتغير y قد أمكن فصله، ويمكن إعادة كتابة المعادلة:

$$\frac{x\,dx - z\,dz}{(x^2-z^2)} + \frac{y\,dy}{(y^2-a^2)} = 0$$

وبتكامل طرفي المعادلة الأخيرة نحصل على : $(x^2 - z^2)(y^2 - a^2) = c$ وهو الحل المطلوب

ثانيا– طرق الاختزال والتحويل: وهي الطرق التي يتم اختزال المعادلة التفاضلية في ثلاثة متغيرات إلى معادلة تفاضلية عادية في متغيرين أو تحويلها إلى شكل اخر يمكن حلها وفي هذا النوع تزداد الخطوات الرياضية صعوبة وتحتاج إلى معرفة جيدة بتقنيات التكامل.

1– طريقة المعـادلة المتجـانسة (Homogeneous Equation Eethod):–

تسمى المعادلة $f(x\,,y\,,z)$ متجانسة من الدرجة n في متغيراتها $(x\,,y\,,z)$ إذا كان

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n f(x, y, z) \qquad (24)$$

وتسمى معادلة بفاف التفاضلية :

$$P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz = 0$$

متجانسة إذا كانت الدوال P, Q, R دوال متجانسة في (x, y, z) من نفس الدرجة n.

وعندما تكون معادلة بفاف التفاضلية قابلة للتكامل ومتجانسة فإننا نستعين بمتغيرين جديدين u, v فنستخدم التحويل $z = v x$, $y = u x$ ومنهما يكونان $dy = u\, dx + x\, du$, $dz = v\, dx + x\, dv$

بالتعويض في المعادلة الأصلية نحصل على :

$$\frac{dx}{x} + \frac{Q(1,u,v)}{P+uQ+vR}\, du + \frac{R(1,u,v)}{P+uQ+vR}\, dv = 0$$

نضع $A(u, v) = \frac{Q}{P+uQ+vR}$, $B(u,v) = \frac{R}{P+uQ+vR}$

$$\frac{dx}{x} + A(u,v)\, du + B(u,v)\, dv = 0 \qquad (25)$$

وهكذا يتم تحويل معادلة بفاف التفاضلية المتجانسة بالتعويض $z = v x$ ، $y = u x$ إلى معادلة بفاف التفاضلية التي فصل أحد المتغيرات وهو (x) وتحل بطريقة متغير واحد قابل للفصل.

و المقدار $A(u,v)\, du + B(u,v)\, dv$ تفاضل تام لان: $\frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial B}{\partial u}$

<u>مثـــال 4:</u> حل المعادلة $yz(y+z)dx + xz(x+z)dy + xy(x+y)dz = 0$

المعادلة قابلة للتكامل وهى معادلة متجانسة و يمكن استخدام التحويل

$$z = v x \ ، \ y = u x$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على : $\frac{dx}{x} + \frac{v(1+v)du + u(1+u)dv}{2uv(1+u+v)} = 0$

هذه المقدار $\frac{v(1+v)du+u(1+u)dv}{2uv(1+u+v)}$ تفاضل تام يحل بطريقة المعادلات التامة واستخدام الكسور الجزئية في عملية التكامل، نحصل على الحل العام :

$$xyz = c\,(x + y + z)$$

طريقة خاصة للمعادلة المتجانسة : إذا كانت معادلة بفاف التفاضلية قابلة للتكامل ومتجانسة وتم تجميع المقدار $D=P\,X+QY+RZ$ ، وكان لا ينعدم ($D \neq 0$)

فإن العامل التكاملي (Integrating Factor) للمعادلة المتجانسة [3] هو :

$$I.F = \frac{1}{D} \qquad (26)$$

وعند ضرب العامل التكاملي في المعادلة المعطاة :

$$\frac{Pdx + Q\,dy + R\,dz}{D} = 0 \qquad (27)$$

يمكن تكاملها بعد تبسيط الكسور والبحث عن تفاضلات تامة أو استخدام الصيغة [4] :

$$\frac{Pdx + Q\,dy + R\,dz - d\,(D)}{D} + \frac{d\,(D)}{D} = 0 \qquad (28)$$

حيث $d\,(D)$ تعنى التفاضلات الكلية للمفدار D

وهذه الصيغة ناتجة من ضرب العامل التكاملي في المعادلة المعطاة وإضافة وطرح $d\,(D)$ من البسط، لتبسيط عملية التكامل للمعادلة التفاضلية المتجانسة.

<u>مثال 5:</u> حل معادلة بفاف التفاضلية: $z\,(y + z)\,dx - x\,z\,dy + x\,y\,dz = 0$

المعادلة قابلة للتكامل ومتجانسة والمقدار $D = x\,z\,(y + z) \neq 0$

وباستخدام الصيغة ينتج $\frac{2(dy + dz)}{y+z} = \frac{d\,(D)}{D}$

وبعد التكامل نحصل على الحل : $x\,z= c\,(y +z)$ حيث c ثابت اختياري.

2 – طريقة الاختزال إلى معادلة تفاضلية عادية :

(Method of Reduction to an Ordinary Differential Equation)

في هذه الطريقة تختزل معادلة بفاف التفاضلية في ثلاثة متغيرات والقابلة للتكامل

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0 \quad (2)$$

إلى معادلة تفاضلية عادية في متغيرين وذلك باستخدام التحويل (التعويض):

$$dz = dx + k\,dy \quad \text{ومنه} \quad z = x + ky \qquad (29)$$

وبالتعويض في المعادلة (2) نحصل على معادلة تفاضلية عادية في متغيرين x, y

$$P(x, y, k)\,dx + Q(x, y, k)\,dy = 0 \qquad (30)$$

وهذه المعادلة التفاضلية العادية في متغيرين يتم حلها بالطرق المعتادة المستعملة في المعادلات التفاضلية العادية حسب نوعية وشكل المعادلة سواء كانت تامة أو متجانسة أو خطية أو معادلة برنولي أو أخرى.

وهده الطريقة تتطلب حل معادلة تفاضلية عادية واحدة في متغيرين بدلا من معادلتين تفاضليتين في طريقة ناتاني وتعتبر نظريا أفضل منها ولكن في بعض الأحيان تكون المعادلة التفاضلية الواحدة الناتجة من هذه الطريقة أكثر صعوبة من المعادلتين الناتجتين من طرق ناتاني [5].

<u>مثـــال 6:</u> حل المعادلة $(y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz = 0$

المعادلة قابلة للتكامل ونفرض أن $z = x + ky$ وبالتعويض عن z ، dz في المعادلة الأصلية وتجميع الحدود المتشابهة نجد أن :

$$(2x + 2y + ky)dx + (2x + kx + 2ky)dy = 0$$

هذه المعادلة الناتجة هي معادلة تفاضلية عادية تامة ويمكن حلها بإحدى طرق حل المعادلات التامة، ويكون حلها: $U(x,y,k) = x^2 + 2xy + kxy + ky^2$

وبالتعريض عن k بـ $\frac{z-x}{y}$ نجد أن :

$xy + xz + yz = c$ وهو الحل المطلوب.

ثالثا: الطرق البارمترية: والتي يتم فيها اختيار أحد المتغيرات ثابتا ويجب تحديد المتغير المناسب ليكون ثابتا الذي يجعل المعادلة الناتجة سهلة التكامل وليس اختيارا عشوائيا.

1- طريقة الخدعة (Trick Method): وسميت بطريقة الخدعة، لأنه يتم فيها تفاضل الحل الأول للرجوع للمعادلة الأصلية. وفيها يتم فرض أحد المتغيرات بارمترا (ثابتا مؤقتا) وليكن Z مثلا، تم نحل المعادلة الناتجة في المتغيرين الآخرين X,Y بالطرق المعتادة لحل المعادلة التفاضلية العادية لكن بأخذ الثابت الاختياري دالة في Z بدلا من كونه ثابتا مطلقا، ثم نأخذ التفاضلات الكلية للحل الذي نحصل عليه ونقارنه بالمعادلة التفاضلية المعطاة بغية حساب هذه الدالة، وتفشل هذه الطريقة عندما لا نحصل على الدالة في المتغير المفروض ثابتا.

مثال7: حل المعادلة $y\,z\,dx - 2x\,z\,dy + 3\,x\,y\,dz = 0$

المعادلة التفاضلية قابلة للتكامل و يمكن حلها بطريقة الخدعة:

نفرض أن z=a ثابتة وبالتالي $dz = 0$ وتصبح المعادلة إلى: $ya\,dx - 2xa\,dy = 0$

وحلها يكون $\frac{x}{y^2} = f(z)$

نأخذ التفاضلات الكلية للحل : $\frac{y^2\,dx - 2xy\,dy}{y^4} = f'(z)\,dz$

ومنها (31) $y\,dx - 2x\,dy - y^3\,f'(z)\,dz = 0$

بمقارنة المعادلة (31) بالمعادلة الأصلية نجد أن : $-Zy^3\ f'(z) = 3xy$

ولحساب الدالة f(z) نحصل على: $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-3}{z}$

بالتكامل بالنسبة إلى z نحصل على : $\text{Ln } f(z) = -3 \ \ln z + \text{Ln } c$

$\frac{x}{y^2} = \frac{c}{z^3}$ وهو الحل المطلوب

2- طـريــقة ناتانـي (Natani's Method) :- وهى امتداد لطريقة الخدعة وتطوير لها، نفرض أن المعادلة (2) $P(x ,y, z)\, dx + Q(x ,y ,z)\, dy + R(x ,y ,z)\, dz = 0$ قابلة للتكامل.

الخطوة 1- نعتبر أحد المتغيرات الثلاثة ثابتاً وليكن z ونحل المعادلة التفاضلية العادية الناتجة في متغيرين $P\, dx + Q\, dy=0$

نحصل على الحل الذي يكون دالة ثابتة بدلالة المتغير المحذوف.

$$Q(x ,y ,z) = f(z) \qquad (32)$$

الخطوة 2- لتحديد الدالة f(z) نعتبر أحد المتغيرين الآخرين ثابت وليكن

$x = \alpha$ (وكحالة خاصة ولتبسيط هذه الطريقة غالبا نختار قيمة α أما 0 أو 1) [6] ونحصل على معادلة تفاضلية عادية جديدة.

$Q(\alpha ,y ,z)\, dy + R(\alpha ,y ,z)\, dz = 0$ وحلها يكون: (33) $k (y, z) = c$

الخطوة 3- الحلان (32) و(33) متكافئين و يمثلان حلا عاما للمعادلة (2) ويتم حذف المتغير الثالث وهو y من الحلين نحصل على الدالة f(z)

الخطوة 4- نعوض بالدالة f(z) في المعادلة (32) لنحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية (2)

مثـــال8:

حل المعادلة $2xz(y-z)dx - z(x^2+2z)dy + y(x^2+2y)dz = 0$

المعادلة قابلة للتكامل وباستخدام طريقة ناتانى : نعتبر z ثابت ومنه $dz = 0$

$$2xz(y-z)dx - z(x^2+2z)dy = 0$$

بحل المعادلة التفاضلية السابقة نحصل على الحل الأول :

$$\frac{x^2+2z}{y-z} = \varphi(z) \qquad (34)$$

نفرض $x = 0$ بالمعادلة الأصلية : $-2z^2dy + 2y^2dz = 0$

بعد فصل المتغيرات والتكامل ينتج الحل الثاني: $\frac{y-z}{yz} = c \qquad (35)$

الحلان متكافئين وبعد حذف المتغير y منهما نحصل على: $\varphi(z) = \frac{2}{cz} - 2$

نعوض بالدالة $\varphi(z)$ في (34) ينتج : $\frac{2(y-z)}{x^2z+2yz} = c$ وهو الحل المطلوب

3- **طريقة استخدام البرهان** (Method Of Using The Proof): ويتم استخدام بعض خطوات برهان الشرط الكافي في النظرية 1 في حل المعادلة التفاضلية $Pdx + Q\,dy + R\,dz = 0$

ويمكن تلخيص خطوات طريقة استخدام البرهان في الحل(كما سبق في برهان شرط الكافي لقابلية المعادلة للتكامل وفق المعادلات (13و14و15و16و17) إلى أربع خطوات رئيسة هي:

الخطوة الأولى : نعتبر أحد المتغيرات ثابتا وليكن Z مما يؤدى إلى $dz = 0$ وتصبح المعادلة على الصورة :

$P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy = 0$ ويكون حلها: $U(x,y,z) = c$

الخطوة الثانية: نجد المعامل μ من أحد المعادلتين : $\frac{\partial u}{\partial x} = \mu P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \mu Q$

الخطوة الثالثة:" نجد الدالة k (u ,z) والتي لا تحتوى على (x ,y) و التي تحقق المعادلة:

$$k = \mu R - \frac{\partial u}{\partial z}$$

(حيث R هي معامل المتغير المفروض ثابتا و $\frac{\partial u}{\partial z}$ المشتقة الجزئية بالنسبة للمتغير المفروض ثابتا).

الخطوة الرابعة: نجد الحل العام للمعادلة الأصلية الذي يحقق المعادلة $\frac{du}{dz} + k = o$

<u>**مثال 9:**</u> المعادلة $y\,z\,dx + x\,z\,dy + x\,y\,z\,dz = 0$ هي معادلة قابلة للتكامل و حلها :

نضع z ثابتا وبالتالي $dz = 0$ ونحل المعادلة التفاضلية $y\,z\,dx + x\,z\,dy = 0$

الذي حلها يكون $U(x ,y ,z) = x\,y = c$

- من المعادلة $\frac{\partial u}{\partial x} = \mu P$ نجد ان $\mu = \frac{1}{z}$
- من المعادلة $k = \mu R - \frac{\partial u}{\partial z}$ نجد ان $K = x\,y = u$
- الحل العام يكون بتكامل المعادلة $\frac{du}{dz} + u = o$

$x\,y\,e^{z} = c$ وهو الحل المطلوب

الخاتمة :

لقد تطرقنا في هذه الورقة البحثية لمعادلة بفاف التفاضلية في ثلاث متغيرات، وتعرفنا على الشرط الضروري والكافي لاختبار قابلية المعادلة للتكامل وعلاقة التكاملية بالمعادلات التفاضلية التامة، وناقشنا طرق الحل المختلفة لمعادلة بفاف التفاضلية في ثلاثة متغيرات والتي قسمت حسب نظرنا إلى ثلاثة أنواع، طرق مباشرة وسهلة وطرق تعتمد على التحويل والاختزال وطرق بارمترية، وربطنا أحد طرق الحل بخطوات برهان شرط قابلية المعادلة للتكامل، وكذلك

أحد التفاضلات الكلية في بعض الطرق للتعرف على الحل والتحقق منه، وبينا أن كل الطرق تحتاج إلى تقنيات تكاملية تم توضيحها بمثال لكل طريقة. ونريد أن نؤكد على النقاط التالية:

- الحل العام لمعادلة بفاف التفاضلية القابلة للتكامل عندما تكون تامة يكون الحل مباشرا.
- في بعض الأحيان معادلة بفاف التفاضلية في ثلاث متغيرات القابلة للتكامل يمكن أن تختزل إلى معادلة تفاضلية عادية في متغيرين أو معادلتين تفاضليتين عاديتين.
- في حقيقة الأمر إن طريقة ناتاني والتي يتم فيها اعتبار أحد المتغيرات ثابتا هي طريقة اختزال وتخفيض لمعادلة بفاف التفاضلية من ثلاث متغيرات إلى معادلتين تفاضليتين عاديتين في متغيرين يسهل حلهما.
- في أغلب الأحيان طرق الحل للمعادلات التفاضلية الجزئية بصورة عامة ومعادلة بفاف التفاضلية خاصة تعتمد على الاختزال (التخفيض) في شكل المعادلة التفاضلية إلى معادلة تفاضلية عادية أو التحويل (التعويض) لتغيير المتغيرات.
- إن عملية اختيار أحد المتغيرات الثلاثة ثابتا في الطرق البارمترية ليست عملية عشوائية ويجب تحديد المتغير المناسب ليكون ثابتا والذي يجعل حل المعادلة التفاضلية العادية الناتجة سهلة الحل ليتم استكمال باقي خطوات الطريقة.
- التدرج في استخدام هذه الطرق والانتقال من الطرق السهلة إلى الصعبة إلى الأكثر صعوبة حسب المعادلة المعطاة وأن بعض معادلات بفاف التفاضلية تحل بأكثر من طريقة.

هوامش :

(1) الزوام أحمد دله، المعادلات التفاضلية الجزئية للأقسام العلمية والهندسية، ص45.

(2) أحمد عبد العالي هب الريح، أساسيات المعادلات التفاضلية الجزئية (الجزء الأول)، ص88.

(3) L N. Sneddon, Elements of Partial Differential Equations. P29.

(4) D. Zwillinger, Handbook of Differential Equations,P386.

(5) أحمد عبد العالي هب الريح، أساسيات المعادلات التفاضلية الجزئية (الجزء الأول)، ص109.

(6) P30 و Boniface.0.Kwach.Elements of Partial Differential Equations

المراجع

المراجع العربية :

1- الزوام أحمد دلة، المعادلات التفاضلية الجزئية (للأقسام العلمية والهندسية)، جامعة طرابلس، ليبيا، 1998م.

2- أحمد عبد العالي هب الريح، أساسيات المعادلات التفاضلية الجزئية (الجزء الأول)، جامعة مصراتة، ليبيا، 2004م.

المراجع الأجنبية :

1- L. N. Sneddon, Elements of Partial Differential Equations, McGraw Hill,1990.

2- W. A. Strauss, Partial Differential Equations: An Introduction, second Edition John Wiley, 2007.

3-K. S. Bhamra, Partial Differential Equations: An Introduction Treatment with Applications,2010.

4-D. Zwillinger, Handbook of Differential Equations, 3rd edition. Academic Press, 1997.

5- E.C. Zachmanoglou and D. W. Thoe, Introduction to Partial Differential Equations with Applications, Dover Publications, Inc., New York,1986.

6- B.O. Kwach, Elements of Partial Differential Equations: Simplified Theory, First Edition,2011 (www.academia.edu).