Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 2, No. 18, Sep. 2021
Published online in September
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد الثامن عشر، سبتمبر 2021
Issn :2710- 4141
تاريخ الاستلام 2021/06/28 تاريخ النشر 22/ 2021/10

حل مسائل القيم الحدية عدديا

زينب نوري بن سليم
Z.saleem@edu.misuratau.edu.ly
كلية التربية – جامعة مصراتة

سمية رجب رفيدة
rajabsoma@ gmail.com
كلية التربية – جامعة مصراتة

الملخص:

في هذه الورقة تم دراسة مسألة القيمة الحدية العادية من الرتبة الثانية بتطبيق الطرق الثلاثة – ريلي و رتز و اختيار النقاط و جاليركن – على نفس المثال بفرض الحل كدالة تقريبية لمتعددة حدود من الدرجة الثالثة والرابعة، ولاحظنا انه كلما زادت درجة الدالة التقريبية كلما زادت دقة النتائج المتحصل عليها، وطريقة اختيار النقاط سهلة التطبيق أما طريقتي ريلي و رتز و جاليركن هما الأفضل في الدقة.

الكلمات المفتاحية: مسألة القيمة الحدية– طريقة ريلي ورتز– طريقة اختيار النقاط– طريقة جاليركن

Solve the boundary value problem

ZAYNAB NOURI BN SALEEM SUMAIA RAJAB RAFIEDA
FACULTY OF EDUCATION- MISURATA UNIVERSITY

Abstract:

This paper studies the boundary value problem from the second order, using three methods ; Rayleigh-Ritz method, collocation method, and Galrekin – at the same example suppose the solution is approximate function for polynomial function of third and fourth degree, we noted that, when the degree increased the accuracy increased too, the collocation method is easy to apply, and Rayleigh-Ritz method and Galerkin methods are better accuracy.

Keywords :boundary value problem- The Rayleigh – Ritz Method- The collocation method- The Galerkin method

المقدمة:

مسائل القيم الحدية تظهر عند معالجة بعض المسائل الفيزيائية والهندسية وغيرها من العلوم، ولكن قد يصعب حلها تحليلياً وبالتالي يجب استخدام طرق عددية لإيجاد قيم تقريبية لحل هذه المسائل.

هذا البحث يهتم بدراسة بعض الطرق العددية وهي طريقة ريلي ورتز وطريقة اختيار النقاط وطريقة جاليركن.

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 2, No. 18, Sep. 2021
Published online in September
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد الثامن عشر، سبتمبر 2021
Issn :2710- 4141
تاريخ الاستلام 2021/06/28 تاريخ النشر 22/ 2021/10

1) مسألة القيمة الحدية boundary value problem

المعادلة التفاضلية
$$y'' = f(x, y, y') \quad , \quad a \le x \le b \quad (1)$$
مع الشرطين الحدين:
$$y(b) = \beta \, , \, y(a) = \alpha \quad : \quad \alpha, \beta \in \Re$$
تسمى مسألة قيمة حدية

2) طريقة ريلي ورتز (The Rayleigh – Ritz Method)

هذه الطريقة تعتمد على حسبان التغاير، بهذه الطريقة تحل مسألة القيمة الحدية بتقريب الحل بتركيب خطي نهائي من دوال أساسية بسيطة تحقق شروط معينة .

الآن نعتبر مسألة قيمة حدية خطية من الرتبة الثانية على الفترة $[a,b]$:

$$y'' + Q(x)y = F(x) \quad , \quad y(a) = \alpha \quad , \quad y(b) = \beta \qquad (1)$$

الدالية المناظرة للمعادلة (1) هي :

$$I[u] = \int_a^b [(\frac{du}{dx})^2 - Qu^2 + 2Fu]dx \quad (2)$$

طريقة ريلي ورتز تعتمد على الفكرة التالية :-

نفرض أن $u(x)$ وهي تقريب للحل الفعلي $y(x)$ على الصورة التالية :

$$u(x) = c_0 v_0(x) + c_1 v_1(x) + \cdots + c_n v_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i v_i(x) \quad (3)$$

حيث $c_0 = 1$

يوجد شرطان على v في المعادلة (3) :

1) يجب اختيار v_i بحيث $u(x)$ تحقق الشرطين الحديين

2) الدوال الأساسية v_i حيث $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ يجب أن تكون مستقلة خطياً الدوال v_i حيث $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ تسمى دوال تجريبية وتختار العوامل c_i و v_i لجعل $u(x)$ تقريب جيد للحل الفعلي للمعادلة (1) .

إذا كان لدينا بعض المعلومات المسبقة عن الدالة الفعلية $y(x)$ فإنه يمكن اختيار v_i بصورة أفضل لتمثيل $y(x)$ عادة لا توجد معلومات والاختيار المعتاد هو استخدام متعددات حدود . يجب إيجاد طريقة لتحديد قيم c_i لجعل $u(x)$ قريبة جدا من $y(x)$ ، تستخدم الدالية في (2) للقيام بهذه المهمة .

إذا عوضنا عن $u(x)$ كما في المعادلة (3) في (2) نحصل على :

$$I(c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n) = \int_a^b [(\frac{d}{dx}\sum_{i=0}^{n} c_i v_i(x))^2 - Q(\sum_{i=0}^{n} c_i v_i(x))^2 + 2F c_i v_i] dx \qquad (4)$$

لاحظ أن I دالة عادية في العوامل c_i حيث $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ ، لإيجاد القيمة الصغرى للدالية $I[.]$ نأخذ المشتقات الجزئية بالنسبة لكل وسيط c_i ونجعلها تساوي الصفر وتكون النتيجة فئة من المعادلات في c_i التي يمكن حلها . هذا يعرف $u(x)$ في المعادلة (3) .

إذا أخذنا المشتقات الجزئية بالنسبة لـ c_i وهي احدى الوسيطات نحصل على :

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = \int_a^b 2(\frac{du}{dx})\frac{\partial}{\partial c_i}(\frac{du}{dx})dx - \int_a^b 2Qu\frac{\partial u}{\partial c_i}dx + \int_a^b 2F\frac{\partial u}{\partial c_i}dx = 0 \qquad (5)$$

الدالة الأساسية $v_0(x)$ خطية وتحقق الشرطين الحديين ويمكن إيجادها كما يلي :

$$v_0(x) = c + dx$$

وبتطبيق الشرطين الحديين نجد أن :

$$v_0(x) = \alpha - \frac{\alpha - \beta}{a - b}a + \frac{\alpha - \beta}{a - b}x \qquad (6)$$

الحل التقريبي لمسألة القيمة الحدية يأخذ احدى الصيغتين التاليتين :

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 2, No. 18, Sep. 2021
Published online in September
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد الثامن عشر، سبتمبر 2021
Issn :2710- 4141
تاريخ النشر 22/ 2021/10 تاريخ الاستلام 2021/06/28

$$u(x) \cong v_0(x) + c_1(x-a)(x-b) + c_2(x-a)^2(x-b) + c_3(x-a)^3(x-b) + \ldots + c_n(x-a)^n(x-b) \quad (7)$$

أو

$$u(x) \cong v_0(x) + c_1(x-a)(x-b) + c_2(x-a)(x-b)^2 + c_3(x-a)(x-b)^3 + \ldots + c_n(x-a)(x-b)^n \quad (8)$$

حيث $v_0(x)$ معرفة بالمعادلة (6)

من (3) بالتعويض في المعادلة (5) نحصل على:

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = \int_a^b 2(v_0'(x) + c_1 v_1'(x) + \cdots + c_i v_i'(x) + \cdots + c_n v_n'(x))(v_i'(x))dx - \int_a^b 2Q(x)(v_0(x) + c_1 v_1(x) + \cdots + c_i v_i(x) + \cdots + c_n v_n(x))(v_i(x))dx + \int_a^b 2F(x)(v_i(x))dx = 0 \quad (9)$$

مثال 1

اوجد حل مسألة القيم الحدية : $y'' - 4y = -x \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 2$

حيث أن الحل الفعلي : $y = \frac{7}{4}\left(\frac{e^2}{e^4 - 1}\right)\left(e^{2x} - e^{-2x}\right) + \frac{x}{4}$

الحل

1- للحصول على متعددة حدود من الدرجة الثالثة نفرض أن الحل التقريبي على الصورة:-

$$u(x) = v_0(x) + c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x)$$

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 2, No. 18, Sep. 2021
Published online in September
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد الثامن عشر، سبتمبر 2021
Issn :2710- 4141
تاريخ الاستلام 2021/06/28 تاريخ النشر 22/ 2021/10

حيث $v_0(x)$ تحقق الشرطين الحدين والتعويض في العلاقة (6) نحصل على :

$$v_0(x) = 2x$$

لاحظ أن $v_0(0) = 0$ ، $v_0(1) = 2$

من (7) حل هذه المسألة يكون :

$$u(x) = 2x + c_1(x-0)(x-1) + c_2(x-0)^2(x-1)$$

هذا الحل التقريبي يحقق الشرطين الحديين للمسألة .

واضح أن :

$$v_0(x) = 2x, \quad v_1(x) = x^2 - x, v_2(x) = x^3 - x^2$$

$$v_0'(x) = 2 \quad , \quad v_1'(x) = 2x - 1 \quad , \quad v_2'(x) = 3x^2 - 2x$$

وبالتعويض عن $v_i(x)$ ومشتقاتها في (9) نحصل على :

$$\frac{\partial I}{\partial c_1} = \int_0^1 (2 + (2x-1)c_1 + (3x^2 - 2x)c_2)(2x-1)dx$$

$$-\int_0^1 (-4)(2x + (x^2 - x)c_1 + (x^3 - x^2)c_2)(x^2 - x)dx$$

$$+\int_0^1 2(-x)(x^2 - x)dx = 0$$

$$4c_1 + 2c_2 = 5 \quad (1)$$

وبالمثل

$$\frac{\partial I}{\partial c_2}=\int_0^1(2+(2x-1)c_1+(3x^2-2x)c_2)(3x^2-2x)dx$$

$$-\int_0^1(-4)(2x+(x^2-x)c_1+(x^3-x^2)c_2)(x^3-x^2)dx$$

$$+\int_0^1(-x)(x^3-x^2)dx=0$$

$$98c_1+72c_2=147 \quad (2)$$

من المعادلتين (1) ، (2) نحصل على المنظومة التالية :

$$4c_1+2c_2=5$$
$$98c_1+72c_2=147$$

وبعد حل هذه المنظومة نحصل على :

$$c_1=0.717391304, c_2=1.065217391$$

حل المسألة المطلوبة يكون :

$$u(x)=2x+0.717391304(x^2-x)+1.065217391(x^3-x^2)$$

2- للحصول على متعددة حدود من الدرجة الرابعة نفرض ان الحل العددي على الصورة :

$$u(x)=v_0(x)+c_1v_1(x)+c_2v_2(x)+c_3v_3(x)$$

من (7) حل هذه المسألة يكون :

$$u(x)=2x+c_1(x-0)(x-1)+c_2(x-0)^2(x-1)+c_3(x-0)^3(x-1)$$

هذا الحل التقريبي يحقق الشرطين الحديين للمسألة .

واضح أن :

$$v_0(x)=2x \quad , \quad v_1(x)=x^2-x$$
$$v_2(x)=x^3-x^2, v_3(x)=x^4-x^3$$

هكذا

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 2, No. 18, Sep. 2021
Published online in September
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد الثامن عشر، سبتمبر 2021
Issn :2710- 4141
تاريخ النشر 22/ 2021/10 تاريخ الاستلام 2021/06/28

$$v_0'(x) = 2 \quad , \quad v_1'(x) = 2x - 1$$

$$v_2'(x) = 3x^2 - 2x \quad , \quad v_3'(x) = 4x^3 - 3x^2$$

وبالتعويض عن $v_i(x)$ ومشتقاتها في (9) نحصل على :

$$\frac{\partial I}{\partial c_1} = \int_0^1 (2 + (2x-1)c_1 + (3x^2 - 2x)c_2 + (4x^3 - 3x^2)c_3)(2x-1)dx$$

$$-\int_0^1 (-4)(2x + (x^2 - x)c_1 + (x^3 - x^2)c_2 + (x^4 - x^3)c_3)(x^2 - x)dx$$

$$+\int_0^1 (-x)(x^2 - x)dx = 0$$

$$196c_1 + 98c_2 + 58c_3 = 245 \quad (1)$$

وبالمثل

$$\frac{\partial I}{\partial c_2} = \int_0^1 (2 + (2x-1)c_1 + (3x^2 - 2x)c_2 + (4x^3 - 3x^2)c_3)(3x^2 - 2x)dx$$

$$-\int_0^1 (-4)(2x + (x^2 - x)c_1 + (x^3 - x^2)c_2 + (x^4 - x^3)c_3)(x^3 - x^2)dx$$

$$+\int_0^1 (-x)(x^3 - x^2)dx = 0$$

$$98c_1 + 72c_2 + 52c_3 = 147 \quad (2)$$

وبالمثل

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 2, No. 18, Sep. 2021
Published online in September
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد الثامن عشر، سبتمبر 2021
Issn :2710- 4141
تاريخ الاستلام 2021/06/28 تاريخ النشر 22/ 2021/10

$$\frac{\partial I}{\partial c_3}=\int_0^1 (2+(2x-1)c_1+(3x^2-2x)c_2+(4x^3-3x^2)c_3)(4x^3-3x^2)dx$$
$$-\int_0^1 (-4)(2x+(x^2-x)c_1+(x^3-x^2)c_2+(x^4-x^3)c_3)(x^4-x^3)dx$$
$$+\int_0^1 (-x)(x^4-x^3)dx=0$$

$$87c_1+78c_2+64c_3=147 \quad (3)$$

من المعادلات (1) ، (2) ، (3) نحصل على المنظومة التالية :

$$196c_1+98c_2+58c_3=245$$
$$98c_1+72c_2+52c_3=147$$
$$87c_1+78c_2+64c_3=147$$

وبعد حل هذه المنظومة نحصل على :

$$c_1=0.7989130, c_2=0.66576089, c_3=0.399456521$$

حل المسألة المطلوبة يكون :

$$u(x)=2x+798913(x^2-x)+0.66576089(x^3-x^2)$$
$$+0.399456521(x^4-x^3)$$

جدول (1) المقارنة بين الحل الفعلي والحلين العدديين

x	الحل العددي بفرض دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة	الحل العددي بفرض دالة كثيرة حدودمن الدرجة الرابعة	الحل الفعلي
0	0	0	0
0.1	0.125847826	0.121746471	0.122146833
0.2	0.251130434	0.24831305	0.24819251
0.3	0.38223913	0.382735607	0.382192349

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 2, No. 18, Sep. 2021
Published online in September
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد الثامن عشر، سبتمبر 2021
Issn :2710- 4141
تاريخ النشر 22/ 2021/10 تاريخ الاستلام 2021/06/28

0.4	0.525565217	0.529008706	0.528520895
0.5	0.6875	0.692085608	0.692047489
0.6	0.874434782	0.877878271	0.87833169
0.7	1.09276087	1.093257346	1.0938464
0.8	1.348869565	1.346052181	1.346237641
0.9	1.649152174	1.645050819	1.644631424
1	2	2	2

نلاحظ من الجدول (1) ان الحل العددي (بفرض دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة) يتوافق مع الحل الفعلي من رقم إلى ثلاثة ارقام معنوية بينما الحل العددي (بفرض دالة كثيرة حدود من الدرجة الرابعة) يتوافق مع الحل الفعلي من رقم إلى اربعة ارقام معنوية احيانا .

3) طريقة اختيار النقاط (The collocation method)

طريقة اختيار النقاط تسمى (طريقة الباقي) وتبدأ بتعريف الباقي $R(x)$ وهو الطرف الأيسر للمعادلة التفاضلية ناقص الطرف الأيمن للمعادلة .

$$y''+Q(x)y=F(x) \qquad (1)$$

أو بمعنى أخر

$$R(x)=y''+Q(x)y-F(x) \qquad (2)$$

الحل العددي في هذه الطريقة يساوي مجموع الدوال الأساسية (Trial functions) وهي تكون عادة متعددة حدود مستقلة خطياً كما في طريقة ريلي ورتز (Rayleigh – Ritz) ويكتب الحل العددي على الصورة التالية:

$$y(x)\approx v_0(x)+c_1v_1(x)+\cdots+c_nv_n(x) \qquad (3)$$

يعوض عن الحل العددي (3) في المعادلة (2) ويتم اختيار نقاط في الفترة $[a,b]$ لجعل

$$R(x)=0 \qquad (4)$$

حيث عدد النقاط يساوي عدد العوامل المجهولة، المثال التالي يوضح هذه الطريقة

مثال2

أوجد حل مسألة القيمة الحدية في المثال 1

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 2, No. 18, Sep. 2021
Published online in September
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد الثامن عشر، سبتمبر 2021
Issn :2710- 4141
تاريخ الاستلام 2021/06/28 تاريخ النشر 22/ 2021/10

الحل

1- للحصول على متعددة حدود من الدرجة الثالثة نفرض أن الحل التقريبي:-

$$y(x) \approx 2x + c_1(x-0)(x-1) + c_2(x-0)^2(x-1)$$
$$\approx 2x + (x^2 - x)c_1 + (x^3 - x^2)c_2$$
$$y'(x) \approx 2 + (2x-1)c_1 + (3x^2 - 2x)c_2$$
$$y''(x) \approx (2)c_1 + (6x-2)c_2$$

الباقي يكتب كما يلي:

$$R(x) = y'' + Q(x)y - F(x)$$
$$= (-4x^2 + 4x + 2)c_1 + (-4x^3 + 4x^2 + 6x - 2)c_2 - 7x$$

إذا اخترنا النقاط $x = 0.15 , 0.85$ نحصل على منظومة المعادلات التالية :

$$2.51c_1 - 1.0235c_2 = 1.05$$
$$2.51c_1 + 3.5335c_2 = 5.95$$

بعد حل هذه المنظومة نحصل على :

$$c_1 = 0.856787902, c_2 = 1.075268817$$

الحل العددي يكون

$$y(x) \approx 2x + 0.856787902(x^2 - x) + 1.075268817(x^3 - x^2)$$

2- للحصول على دالة كثيرة حدود من الدرجة الرابعة يمكن فرض الحل العددي على الصورة التالية:

$$y(x) \approx 2x + c_1(x-0)(x-1) + c_2(x-0)^2(x-1) + c_3(x-0)^3(x-1)$$
$$\approx 2x + (x^2 - x)c_1 + (x^3 - x^2)c_2 + (x^4 - x^3)c_3$$
$$y'(x) \approx 2 + (2x-1)c_1 + (3x^2 - 2x)c_2 + (4x^3 - 3x^2)c_3$$
$$y''(x) \approx (2)c_1 + (6x-2)c_2 + (12x^2 - 6x)c_3$$

الباقي يكتب كما يلي :

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 2, No. 18, Sep. 2021
Published online in September
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد الثامن عشر، سبتمبر 2021
Issn :2710- 4141
تاريخ النشر 22/ 2021/10 تاريخ الاستلام 2021/06/28

$$R(x) = y'' + Q(x)y - F(x)$$
$$= (-4x^2 + 4x + 2)c_1 + (-4x^3 + 4x^2 + 6x - 2)c_2$$
$$+ (-4x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 6x)c_3 - 7x$$

إذا اخترنا النقاط $x = 0.06 , 0.5 , 0.9$ نحصل على منظومة المعادلات التالية

$$2.256c_1 - 1.626464c_2 - 0.31598784c_3 = 0.42$$
$$3c_1 + 1.5c_2 + 0.25c_3 = 3.5$$
$$2.36c_1 + 3.724c_2 + 4.6116c_3 = 6.3$$

بعد حل هذه المنظومة نحصل على :

$$c_1 = 0.772548, c_2 = 0.723866, c_3 = 0.386224$$

$$y(x) \approx 2x + 0.772548(x^2 - x)$$
$$+ 0.723866(x^3 - x^2) + 0.386224(x^4 - x^3)$$

جدول (2) المقارنة بين الحل الفعلي والحلين العدديين

x	الحل العددي بفرض دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة	الحل العددي بفرض دالة كثيرةحدود من الدرجة الرابعة	الحل الفعلي
0	0	0	0
0.1	0.113211669	0.123475394	0.122146833
0.2	0.228505333	0.250548487	0.24819251
0.3	0.352332605	0.384555105	0.382192349
0.4	0.491145097	0.529797982	0.528520895
0.5	0.651394422	0.691546672	0.692047489
0.6	0.839532193	0.876037981	0.87833169
0.7	1.062010024	1.090475104	1.0938464
0.8	1.325279527	1.343028486	1.346237641

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 2, No. 18, Sep. 2021
Published online in September
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد الثامن عشر، سبتمبر 2021
Issn :2710- 4141
تاريخ النشر 22/ 2021/10 تاريخ الاستلام 2021/06/28

0.9	1.6357923150	1.642835394	1.644631424
1	2	2	2

نلاحظ من الجدول (2) ان الحل العددي (بفرض دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة) يتوافق مع الحل الفعلي من رقم إلى رقمين معنويين بينما الحل العددي (بفرض دالة كثيرة حدود من الدرجة الرابعة) يتوافق مع الحل الفعلي من رقم إلى ثلاثة ارقام معنوية احيانا.

4) طريقة جاليركن (The Galerkin method)

تستخدم هذه الطريقة على نطاق واسع في حل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية وتشبه طريقة اختيار النقاط فهي طريقة الباقي أي أنها تستخدم $R(x)$ (الباقي) ولكن في هذه الطريقة يضرب $R(x)$ بدوال الوزن $W_i(x)$.

دوال الوزن يمكن اختيارها بعدة طرق. جاليركن يبين أن الدوال الاساسية تعتبر دوال وزن ملائمة، بعد اختيار دوال الوزن تحسب العوامل المجهولة بأخذ التكامل على الفترة $[a,b]$ للباقي الموزون ومساواته بالصفر

$$\int_a^b W_i(x)\,R(x)dx = 0 \quad , \quad i = 0\,,1\,,2\,,\cdots,n \qquad (1)$$

حيث $W_i(x) = v_i(x)$ لتوضيح هذه الطريقة نعتبر المثال التالي

مثال 3

أوجد حل مسألة القيمة الحدية في المثال 1

الحل

1- للحصول على متعددة حدود من الدرجة الثالثة نفرض أن الحل التقريبي:

$$y \approx v_0(x) + c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x)$$

حيث $v_0(x)$ دالة خطية تحقق الشرطين الحديين ويمكن كتابتها على الصورة التالية :

$$v_0(x) = ax + b$$

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 2, No. 18, Sep. 2021
Published online in September
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد الثامن عشر، سبتمبر 2021
Issn :2710- 4141
تاريخ النشر 22/ 2021/10 تاريخ الاستلام 2021/06/28

بتطبيق الشرطين الحديين نجد أن:

$$v_0(0) = b = 0 \, , v_0(1) = a = 2$$

$$\therefore v_0(x) = 2x$$

الحل التقريبي يحقق الشرطين الحديين وبالتالي يمكن كتابته كمايلي:

$$y(x) \approx 2x + c_1(x-0)(x-1) + c_2(x-0)^2(x-1)$$

$$\approx 2x + (x^2 - x)c_1 + (x^3 - x^2)c_2$$

$$y'(x) \approx 2 + (2x-1)c_1 + (3x^2 - 2x)c_2$$

$$y''(x) \approx (2)c_1 + (6x-2)c_2$$

الباقي $R(x)$ يكون:

$$R(x) = y'' - 4y + x$$

$$R(x) = (2)c_1 + (6x-2)c_2 - 4\left[2x + (x^2 - x)c_1 + (x^3 - x^2)c_2\right] + x$$

$$= (-4x^2 + 4x + 2)c_1 + (-4x^3 + 4x^2 + 6x - 2)c_2 - 7x \quad (2)$$

الدوال الأساسية هي: $(x^2 - x) \, , (x^3 - x^2)$

لإيجاد العوامل c_1 , c_2 يتطلب إجراء تكاملات للباقي الموزون كما يلي:

$$\int_0^1 R(x)(x^2 - x)\,dx = 0 \quad (3)$$

$$\int_0^1 R(x)\,(x^3 - x^2)\,\,dx = 0 \quad (4)$$

بالتعويض عن $R(x)$ من (2) في المعادلات (3) و (4)

$$\int_0^1 [(-4x^2 + 4x + 2)c_1 + (-4x^3 + 4x^2 + 6x - 2)c_2$$

$$-7x](x^2 - x)\,dx = 0$$

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 2, No. 18, Sep. 2021
Published online in September
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد الثامن عشر، سبتمبر 2021
Issn :2710- 4141
تاريخ النشر 22/ 2021/10 تاريخ الاستلام 2021/06/28

$$4c_1 + 2c_2 = 5 \quad (1)$$

وبالمثل بالتعويض عن $R(x)$ في المعادلات (4)

$$\int_0^1 [(-4x^2 + 4x + 2)c_1 + (-4x^3 + 4x^2 + 6x - 2)c_2 - 7x]\,(x^3 - x^2)\ dx = 0$$

$$98c_1 + 72c_2 = 147 \quad (2)$$

من المعادلتين (1) ، (2) نحصل على المنظومة التالية :

$$4c_1 + 2c_2 = 5$$
$$98c_1 + 72c_2 = 147$$

وبعد حل هذه المنظومة نحصل على:

$$c_1 = 0.717391312, c_2 = 1.065217391$$

حل المسألة المطلوبة يكون:

$$u(x) = 2x + 0.717391312(x^2 - x)$$
$$+ 1.065217391(x^3 - x^2)$$

2-للحصول على متعددة حدود من الدرجة الرابعة يمكن فرض الحل العددي على الصورة:

$$y \approx v_0(x) + c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) + c_3 v_3(x)$$

الحل التقريبي يحقق الشرطين الحديين وبالتالي يمكن كتابته كما يلي:

$$y(x) \approx 2x + c_1(x-0)(x-1) + c_2(x-0)^2(x-1) + c_2(x-0)^3(x-1)$$
$$\approx 2x + (x^2 - x)c_1 + (x^3 - x^2)c_2 + (x^4 - x^3)c_2$$
$$y'(x) \approx 2 + (2x-1)c_1 + (3x^2 - 2x)c_2 + (4x^3 - 3x^2)c_3$$
$$y''(x) \approx (2)c_1 + (6x - 2)c_2 + (12x^2 - 6x)c_3$$

الباقي $R(x)$ يكون :

$$R(x) = y'' - 4y + x$$

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 2, No. 18, Sep. 2021
Published online in September
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد الثامن عشر، سبتمبر 2021
Issn :2710- 4141
تاريخ النشر 22/ 2021/10 **تاريخ الاستلام 2021/06/28**

$$R(x) = (-4x^2 + 4x + 2)c_1 + (-4x^3 + 4x^2 + 6x - 2)c_2 + (-4x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 6x)c_3 - 7x \quad (2)$$

الدوال الأساسية هي :

$$(x^2 - x)\ ,\ (x^3 - x^2)\ ,\ (x^4 - x^3)$$

لإيجاد العوامل C_1 , C_2 , C_3 يتطلب إجراء تكاملات للباقي الموزون كما يلي :

$$\int_0^1 R(x)(x^2 - x)\,dx = 0 \quad (3)$$

$$\int_0^1 R(x)\,(x^3 - x^2)\ dx = 0 \quad (4)$$

$$\int_0^1 R(x)\,(x^4 - x^3)\ dx = 0 \quad (5)$$

بالتعويض عن $R(x)$ من (2) في المعادلات (3) و (4) و (5)

$$\int_0^1 [(-4x^2 + 4x + 2)c_1 + (-4x^3 + 4x^2 + 6x - 2)c_2 + (-4x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 6x)c_3 - 7x](x^2 - x)\,dx = 0$$

وبعد إجراء العمليات التكاملية:

$$196c_1 + 98c_2 + 58c_3 = 245 \quad (1)$$

وبالمثل بالتعويض عن $R(x)$ في المعادلات (4)

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 2, No. 18, Sep. 2021
Published online in September
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد الثامن عشر، سبتمبر 2021
Issn :2710- 4141
تاريخ الاستلام 2021/06/28 **تاريخ النشر 22/ 2021/10**

$$\int_0^1 [(-4x^2+4x+2)c_1+(-4x^3+4x^2+6x-2)c_2$$
$$+(-4x^4+4x^3+12x^2-6x)c_3-7x]\,(x^3-x^2)\;dx=0$$

وبعد إجراء العمليات التكاملية:

$$98c_1+72c_2+52c_3=147 \quad (2)$$

وبالمثل بالتعويض عن $R(x)$ في المعادلات (5)

$$\int_0^1 [(-4x^2+4x+2)c_1+(-4x^3+4x^2+6x-2)c_2$$
$$+(-4x^4+4x^3+12x^2-6x)c_3-7x]\,(x^4-x^3)\;dx=0$$

وبعد إجراء العمليات التكاملية:

$$87c_1+78c_2+64c_3=147 \quad (3)$$

من المعادلات (1) ، (2) ، (3) نحصل على المنظومة التالية :

$$196c_1+98c_2+58c_3=245$$
$$98c_1+72c_2+52c_3=147$$
$$87c_1+78c_2+64c_3=147$$

وبعد حل هذه المنظومة نحصل على :

$$c_1=0.7989130,\ c_2=0.66576089,\ c_3=0.399456521$$

حل المسألة المطلوبة يكون :

$$u(x)=2x+798913(x^2-x)+0.66576089(x^3-x^2)$$
$$+0.399456521(x^4-x^3)$$

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 2, No. 18, Sep. 2021
Published online in September
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد الثامن عشر، سبتمبر 2021
Issn :2710- 4141
تاريخ الاستلام 2021/06/28 تاريخ النشر 22/ 2021/10

جدول (3) المقارنة بين الحل الفعلي والحلين العدديين

الحل الفعلي	الحل العددي بفرض دالة كثيرة حدود من الدرجة الرابعة	الحل العددي بفرض دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة	x
0	0	0	0
0.122146833	0.121746471	0.125847826	0.1
0.24819251	0.24831305	0.251130434	0.2
0.382192349	0.382735607	0.38223913	0.3
0.528520895	0.529008706	0.525565217	0.4
0.692047489	0.692085608	0.6875	0.5
0.87833169	0.877878271	0.874434782	0.6
1.0938464	1.093257346	1.09276087	0.7
1.346237641	1.346052181	1.348869565	0.8
1.644631424	1.645050819	1.649152174	0.9
2	2	2	1

نلاحظ من الجدول (3) ان الحل العددي (بفرض دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة) يتوافق مع الحل الفعلي من رقم إلى ثلاثة ارقام معنوية بينما الحل العددي (بفرض دالة كثيرة حدود من الدرجة الرابعة) يتوافق مع الحل الفعلي من رقم إلى اربعة ارقام معنوية احيانا .

5) مقارنة بين الخوارزميات (ريلي رتز ، اختيار النقاط ، جاليركن)

- من حيث سهولة التطبيق نجد أن طريقة اختيار النقاط هي الاسهل لأنها لا تتطلب اجراء تكاملات قد يصعب ايجادها ولا تتطلب ايجاد الدالية المناظرة للمعادلة التفاضلية ثم تليها طريقة جاليركن حيث تعتمد على ايجاد التكاملات ولا تتطلب ايجاد الدالية المناظرة للمعادلة التفاضلية وبالتالي فإن طريقة ريلي رتز تعتبر هي الاصعب لأنها تعتمد على اجراء تكاملات و ايجاد الدالية المناظرة للمعادلة التفاضلية .
- من حيث دقة النتائج فمن المثال يمكن المقارنة بين نتائج هده الطرق الثلاثة باستخدام متعددة حدود من الدرجة الرابعة .

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 2, No. 18, Sep. 2021
Published online in September
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد الثامن عشر، سبتمبر 2021
Issn :2710- 4141
تاريخ الاستلام 2021/06/28 تاريخ النشر 22/ 2021/10

جدول (4) المقارنة بين الحل الفعلي والحلول العددية الثلاثة السابقة

x	جاليركن	اختيار النقاط	ريلي رتز	الحل الفعلي
0	0	0	0	0
0.1	0.121746471	0.123475394	0.121746471	0.122146833
0.2	0.24831305	0.250548487	0.24831305	0.24819251
0.3	0.382735607	0.384555105	0.382735607	0.382192349
0.4	0.529008706	0.529797982	0.529008706	0.528520895
0.5	0.692085608	0.691546672	0.692085608	0.692047489
0.6	0.877878271	0.876037981	0.877878271	0.87833169
0.7	1.093257346	1.090475104	1.093257346	1.0938464
0.8	1.346052181	1.343028486	1.346052181	1.346237641
0.9	1.645050819	1.642835394	1.645050819	1.644631424
1	2	2	2	2

بمقارنة الحل الفعلي مع الحلول العددية باستخدام الطرق الثلاث – نجد أن طريقة ريلي رتز و جاليركن تعطي نفس النتائج وبالتالي فهي تعطي نفس الدقة من رقمين إلى اربعة ارقام معنوية ، و طريقة اختيار النقاط تعطي دقة اقل .

المصادر و المراجع:

- هب الريح، أ، (2004)، *اساسيات المعادلات التفاضلية الجزئية الجزئين الأول والثاني*، دار ومكتبة الشعب للنشر والتوزيع مصراتة ليبيا، الطبعة الأولى.
- هب الريح، أ ،(2009)، *التحليل العددي الجزئين الأول والثاني* –دار ومكتبة الشعب للنشر والتوزيع مصراتة ليبيا، الطبعة الأولى.
- Burden – F – 1993 - *Numerical Analysis* , printed in the United States of America 5th edition .