Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 17, mar. 2021
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد السابع عشر، مارس 2021
Issn :2710- 4141

الطرق التكرارية لحل الأنظمة الخطية

أ.حنان صالح أبوشحمة
قسم الرياضيات–كلية التربية– جامعة مصراته– ليبيا
h.abushahma@edu.misuratau.edu.ly

الملخص: تهدف هذه الورقة البحثية لدراسة الطرق التكرارية لحل أنظمة المعادلات الخطية، حيث استخدم برنامج Matlab لحساب القيم.

الكلمات المفتاحية: النظام الخطي، طرق تكرارية، طريقة جاكوبي، طريقة جاوس سيدل.

Iterative Methods for Solving Linear Systems

Abstract

This paper presents to study the iterative methods for solving systems of linear equations, where the Matlab program was used to calculate the values.

Keywords: linear system, iterative methods, Jacobi method, Gaussian-Sidel .method

1. مقدمة (Introduction)

تنشأ منظومة المعادلات الخطية في كثير من المجالات العلمية تطبيقية كانت أو نظرية و أحيانا تتولد أنظمة كبيرة الحجم لا يمكن التعامل معها يدويا و لابد من جهاز الحاسب الآلي ، و يمكن كتابة تلك المنظومات على صورة مصفوفات الأمر الذي جعل المصفوفات لغة و أداة مهمة لها دور بارز فهي العامل المشترك في كثير من التطبيقات الرياضية ، الفيزيائية ، الكيميائية وغيرها،

لذلك البحث دائما عن مفاهيم و نظريات حديثة تواكب النظريات العلمية إضافة للتطور السريع في مجال الحاسب الآلي و الذي سهل و بشكل مذهل الحسابات الرقمية للحلول العددية للمسائل المصفوفية .

نعرف المتجه (vector) على أنه مجموعة أعداد مرتبة أفقيا (Row) أو عموديا (Column) . و المصفوفة (Matrix) هي مجموعة أعداد مرتبة بشكل مستطيل و كل عدد يسمى عنصر أو مدخل و يرمز له بدليلين مثل a_{ij} حيث i تمثل رقم الصف و j تمثل رقم العمود .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} , \qquad [x_1, x_2, \dots, x_n], \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

تسمي المصفوفة التي كل عناصرها أصفارا عدا القطر بمصفوفة قطرية أي $a_{ij} = 0$ لكل $i \neq j$ ، أما في حالة كون $a_{ij} = 0$ لكل $i > j$ تنتج مصفوفة مثلثية علوية وفي حالة $a_{ij} = 0$ لكل $i < j$ تنتج مصفوفة مثلثية سفلية .

يقال للمصفوفة A أنها ذات قطر سائد إذاكان :

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{لكل } i$$

يقال عن المصفوفة A أنها مفردة (شاذة) (singular) إذاكان $|A| = 0$ ، حيث $|A|$ هو محدد A (Determinate) ذلك يعني أنه لا توجد مصفوفة A^{-1} بحيث أن $A^{-1}A = \mathrm{I}$ حيث A^{-1} هو معكوس A (Inverse of A) و أن I هي مصفوفة الوحدة (Identity Matrix).

جمع مصفوفتين يجوز عندما تكونان من نفس النوع ، ضرب مصفوفتين يجوز عندما يكون عدد أعمدة المصفوفة الثانية يساوي عدد صفوف المصفوفة الأولي مثلا $A_{m\times n} \times B_{n\times 1} = C_{m\times 1}$. إن عملية جمع المصفوفات تبديلية بينما عملية الضرب ليست كذلك. لتكن كل من A, B مصفوفة فإن :

$$|AB| = |A||B|$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

ولكن A/B غير معرف ، سنركز اهتمامنا على المصفوفة المربعة فبصورة عامة يكون للمعادلة $AX = B \rightarrow (1)$ حلا وحيدا إذاكانت A غير شاذة حيث X متجه مجهول و B متجه معلوم . يقال للمصفوفة A أنها متناظرة (Symmetric) إذاكان $a_{ij} = a_{ij}$ لكل i, j ، يقال للقيمة العددية λ و المتجه المرافق لها X أنها قيمة ذاتية و متجه ذاتي مرافق للمصفوفة A حيث

$$AX = \lambda X \quad \rightarrow (2)$$

$$AX - \lambda X = 0 \;\; \rightarrow \;\; (A - \lambda I)X = 0$$

و بالتالي فإن

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \rightarrow (3)$$

من هذه المعادلة نستخرج القيم الذاتية للمصفوفة A .

تعريف 1 [3]

الخطأ المطلق هو الفرق بين القيمة الحقيقية و القيمة التقريبية و يرمز له بالرمز e أي أن $e_x = |x - x^*|$.

حيث x هي القيمة الحقيقية.

و x^* هي القيمة التقريبية .

تعريف 2 [3]

الخطأ النسبي هو حاصل قسمة الخطأ المطلق علي القيمة الحقيقية ، وهو يبين نسبة الخطأ الموجود في القيمة التقريبية إلى القيمة الحقيقية و يرمز له بالرمز δ أي أن

$$\delta_x = \frac{e_x}{x}$$

و في كثير من الأحيان يقاس الخطأ النسبي مئويا و يسمي الخطأ النسبي المئوي.

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 17, mar. 2021
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد السابع عشر، مارس 2021
Issn :2710- 4141

$$\delta_{\%} = \frac{e_x}{x} \times 100$$

النظام الخطي المتكون من m من المعادلات و n من المجاهيل يأخذ الشكل التالي:

$$a_{11}x_1b_2 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \qquad (4)$$

ويمكن كتابة النظام الخطي السابق باستخدام المصفوفات كالتي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad (5)$$

ويكتب بالصورة $AX = B$

حيث:

A : مصفوفة المعاملات للنظام الخطي.

X : مصفوفة المجاهيل للنظام الخطي .

B : مصفوفة الحدود المطلقة.

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 17, mar. 2021
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد السابع عشر، مارس 2021
Issn :2710- 4141

فإذاكان عدد المعادلات أكبر من عدد المتغيرات أو المجاهيل فلا يوجد حل للمنظومة إلا إذاكانت المعادلات الإضافية مكافئة لمعادلات أخرى عندها يمكن الاستغناء عنها وايجاد الحل ، و إذاكان عدد المعادلات أقل من عدد المتغيرات فيكون للمنظومة عدد كبير من الحلول ، أما إذاكان عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل حيث تكون مصفوفة المعاملات مربعة فإن للمنظومة حل وحيد إذاكانت A غير شاذة .

وفي الحل باستخدام الطرق التكرارية نجزئ مصفوفة المعاملات A إلي ثلاثة أجزاء الهدف منها هو تسهيل عملية ايجاد الحل ، لكن طبعا أن يحقق التقارب إلى الحل الحقيقي . تستخدم الطرق التكرارية غالبا في حل المنظومات كبيرة الحجم و التي تكون فيها مصفوفة المعاملات كثير الأصفار ، وفي هذا البحث تم دراسة طريقتي جاكوبي و جاوس سيدل .

2. طريقة جاكوبي Jacobi Method

هنا نجزئ A إلي مصفوفة D و مصفوفة مثلثية سفلية بدون قطر L و مصفوفة مثلثية عليا بدون قطر U .

$$A = D + L + U \qquad \rightarrow (6)$$

و بصورة مصفوفات تكون :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

و لإيجاد الحل التقريبي لنظام الخطي $AX = B$ يكون

$$(D + L + U)X = B \qquad \rightarrow (8)$$

$$DX = B - LX - UX \qquad \rightarrow (9)$$

هنا نعطي قيمة تخمينية للمتجه X^k في جهة اليمين لنحصل علي قيمة جديدة في جهة اليسار فتصبح المعادلة (9) بالصورة التكرارية :

$$X^{(k+1)} = D^{-1}B = D^{-1}(L + U)X^k \ , \ k = 0,1,\dots \qquad (10)$$

وهذا يؤدي إلي ما يسمي بطريقة جاكوبي بالصورة :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j^{(k)} \right] \ ; \ k = 0\,,1\,,2\,,\cdots \qquad (11)$$

هذه العملية تتكرر حتي يتحقق الشرط

$$max_i \left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| \leq \varepsilon \qquad (12)$$

لكل i ، حيث ε هي درجة السماح المعطاة أو مقدار الخطأ .

فمثلاً :

إذاكان لدينا النظام الخطي التالي :

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 = b_1$$
$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 = b_2$$
$$a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 = b_3$$

فإننا نحصل على :

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}\, x_2^{(k)} - a_{13}\, x_3^{(k)} \right]$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21} x_1^{(k)} - a_{23} x_3^{(k)} \right]$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{31}\, x_1^{(k)} - a_{32}\, x_2^{(k)}}{a_{33}}$$

و نتوقف بالتكرارات عندما يتحقق الشرط $max_i \left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| \leq \varepsilon$ ، حيث ε هي مقدار الدقة أو درجة السماح المعطاة .

بحيث أن المتجه $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)} , x_2^{(0)} , x_3^{(0)} \right)$ هو المتجه الابتدائي .

مثال (1)

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 17, mar. 2021
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد السابع عشر، مارس 2021
Issn :2710- 4141

أوجد حل النظام الخطي باستخدام طريقة جاكوبي بدقة 10^{-3}

$$6x_1 - 2x_2 + x_3 = 11$$
$$-2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 5$$
$$x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1$$

الحل حسب طريقة جاكوبي تكون المعادلات:

$$x_1^{(k+1)} = (11 + 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)})/6$$
$$x_2^{(k+1)} = (5 + 2x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)})/7$$
$$x_3^{(k+1)} = (1 + x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)})/5$$

ونستخدم برنامج **Matlab** لحساب القيم

البرنامج باستخدام Matlab يكون كالتالي :

```
x1=input('enter x1 :') ;
x2=input('enter x2 :') ;
x3=input('enter x3 :') ;
for i=1:10
z1=(11+2*x2-x3)/6 ;
z2=(5+2*x1-2*x3)/7 ;
z3=(1+x1+2*x2)/5 ;
x1=z1 ;
x2=z2 ;
x3=z3 ;
i
```

```
[z1 z2 z3]
end
```

الحل يكون

i	x_1	x_2	x_3
1	1.8333	0.7143	0.2000
2	2.0381	1.1810	0.8524
3	2.0849	1.0531	1.0800
4	2.0044	1.0014	1.0382
5	1.9941	0.9903	1.0014
6	1.9965	0.9979	0.9950
7	2.0001	1.0005	0.9985
8	2.0004	1.0005	1.0002
9	2.0001	1.0001	1.0003
10	2.0000	1.0000	1.0000

جدول (1)

مثال (2) لو قمنا بتبديل المعادلتين الثانية مكان الثالثة ونرى ماذا يحدث :

$$6x_1 - 2x_2 + x_3 = 11$$

$$x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1$$

$$-2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 5$$

فتكون المعادلات بالشكل :

$$x_1^{(k+1)} = (11 + 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)})/6$$

$$x_2^{(k+1)} = (-1 - x_1^{(k)} + 5x_3^{(k)})/2$$

$$x_3^{(k+1)} = (5 + 2x_1^{(k)} - 7x_2^{(k)})/2$$

و نحصل علي النتائج بالجدول (2)

i	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	1.8333	-0.5	2.5
2	1.25	4.8334	6.0833
3	2.4306	14.0833	-13.1669

جدول (2)

واضح أن النتائج متباعدة . لا بد أن يكون هناك شرط معين يجب أن يتحقق لأجل التقارب . لاحظ عناصر القطر بالنسبة للعناصر الباقية .

3. طريقة جاوس. سيدل Seidel Method

وهي طريقة تكرارية تشبه طريقة جاكوبي و لكن الفرق هو استخدام المتغيرات الجديدة التي استخرجت في التكرار (k + 1) لإيجاد المتغيرات غير المستخدمة في التكرار (k + 1) نفسها و تستخدم هذه الطريقة في زيادة سرعة التقارب و ذلك عن طريق استخدام القيم المستخرجة بمجرد الحصول عليها في حساب القيم التي تليها

و المعادلات تكون كالتالي

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}\, x_2^{(k)} - a_{13}\, x_3^{(k)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21}\, x_1^{(k+1)} - a_{23}\, x_3^{(k)}}{a_{22}}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{31}\, x_1^{(k+1)} - a_{32}\, x_2^{(k+1)}}{a_{33}}$$

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 17, mar. 2021
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد السابع عشر، مارس 2021
Issn :2710- 4141

و تكون صيغة سيدل التكرارية بالصورة

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right] ;\ k = 0, 1, 2, \cdots \quad (13)$$

واعادة حل مثال (1) باستخدام جاوس. سيدل يكون :

$$6x_1 - 2x_2 + x_3 = 11$$
$$-2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 5$$
$$x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1$$

اذا تكون المعادلات حسب طريقة جاوس سيدل بالشكل

$$x_1^{(k+1)} = (11 + 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)})/6$$
$$x_2^{(k+1)} = (5 + 2x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)})/7$$
$$x_3^{(k+1)} = (1 + x_1^{(k+1)} + 2x_2^{(k+1)})/5$$

البرنامج باستخدام Matlab يكون كالتالي :

```
x1=input('enter x1 :') ;
x2=input('enter x2 :') ;
x3=input('enter x3 :') ;
for i=1:10
x1=(11+2*x2-x3)/6 ;
x2=(5+2*x1-2*x3)/7 ;
x3=(1+x1+2*x2)/5 ;
```

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 17, mar. 2021
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد السابع عشر، مارس 2021
Issn :2710- 4141

```
i
[x1 x2 x3]
end
```

الحل يكون

i	x_1	x_2	x_3
1	1.8833	1.2381	1.0619
2	2.0690	1.0020	1.0146
3	1.9982	0.9953	0.9978
4	1.9988	1.0003	0.9999
5	2.0001	1.0001	1.0001
6	2.0000	1.0000	1.0000
7	2.0000	1.0000	1.0000
8	2.0000	1.0000	1.0000
9	2.0000	1.0000	1.0000
10	2.0000	1.0000	1.0000

جدول (3)

ولو طبقنا طريقة جاوس سيدل علي المنظومة في مثال (2) نجد النتائج التالية

i	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	1.8333	-1.4167	9.2918
2	-1.1875	13.5315	-4500478
3	13.8518	-120.0454	436.5107

جدول (4)

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 17, mar. 2021
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد السابع عشر، مارس 2021
Issn :2710- 4141

من الملاحظ أن طريقة سيدل هي تسريع للوصول للنتائج سواء أكان تقاربا أو تباعدا . اذ أن في حالة التقارب تكون $x_1^{(k+1)}$ أقرب إلى الحل من $x_1^{(k)}$ و هذا ما يدفع $x_2^{(k+1)}$ و $x_3^{(k+1)}$ إلى التقرب للحل أكثر فعند استخدام $x_1^{(k+1)}$ و $x_2^{(k+1)}$ فكلاهما أقرب للحل من $x_1^{(k)}$ و $x_2^{(k)}$. أما في حالة التباعد فإن $x_1^{(k+1)}$ تكون أبعد عن الحل وعليه فإن $x_2^{(k+1)}$ تبتعد أسرع مما لو استعملنا $x_1^{(k)}$ و هكذا .

إن صيغة التوقف المستخدمة في الأمثلة السابقة هي واحدة من عدة صيغ و إن ذلك يعتمد على المقياس المستخدم للمتجهات .

تعريف 3 [3]: مقياس متجه هو دالة $\|.\|$ نطاقها مجموعة المتجهات ذات n من المركبات في R^n و مداها مجموعة الأعداد الحقيقية R و لها الخواص التالية:

1. $\|x\| \geq 0$ لكل ، $x \in R^n$.
2. $\|x\| = 0$ إذا و فقط إذاكان $x = (0,0,\dots,0)^t$.
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ ، لكل $x \in R^n, \alpha \in R$.
4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ لكل $x, y \in R^n$

ومن المقاييس المستخدمة :

1. L_2 و يعرف بأنه $\|X\|_2 = \{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\}^{1/2}$

و يسمي أيضا المقياس الأقليدي .

2. L_∞ و يعرف بأنه $\|X\|_\infty = max|x_i| \quad 1 \leq i \leq n$

3. L_1 ويعرف بأنه $\|X\|_\infty = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

إن التوقف عن التكرارات يحدث عندما يصبح الفرق بين المتجه $X^{(k+1)}$ و المتجه $X^{(k)}$ أقل من القيمة المسموح بها ε و بهذا يمكن استخدام الصيغ .

$$\left\|X^{(k+1)}-X^{(k)}\right\|_2=\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}\right|^2\right\}^{1/2} \quad .1$$

$$\left\|X^{(k+1)}-X^{(k)}\right\|=\max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}\right| \quad .2$$

كذلك بالإمكان استخدام الصيغة

$$\frac{\left\|X^{(k+1)}-X^{(k)}\right\|}{\left\|X^{(k)}\right\|}$$

شروط التقارب (Convergence Conditions)

لأجل أن نتعرف على أسباب تقارب أو عدم تقارب العملية التكرارية لكل من طريقتي جاكوبي و سيدل نجزئ مصفوفة المعاملات في المنظومة الخطية

$$(\mathrm{AX}=\mathrm{B})$$

نضع:

$$\mathrm{A}=\mathrm{M}+\mathrm{N} \quad \rightarrow (14)$$

فيكون :

$$X=M^{-1}(B-NX) \quad \rightarrow (15)$$

فبوجود X علي جهتي اليمين و اليسار يمكن أن نعطي قيم تخمينية لجهة اليمين لنستخرج قيم جديدة علي جهة اليسار فتكون الصيغة التكرارية .

$$X^{(k+1)}=M^{-1}\left(B-NX^{(k)}\right) \quad \rightarrow (16)$$

بطرح المعادلة (16) من (15) ينتج :

$$e^{(k+1)}=-M^{-1}Ne^{(k)} \quad \rightarrow (17)$$

حيث

$$e^{(k)} = X - X^{(k)}$$

إن المصفوفة $-M^{-1}N$ تسمى مصفوفة التقريب (أو مصفوفة التكرارات) (Iteration Matrix) وهي التي تحدد تزايد $e^{(k+1)}$ عن $e^{(k)}$ أو تناقصه . و بما أننا نريد تناقص $e^{(k+1)}$ بزيادة k ، أي أن المطلوب هو

$$e^{(k)} \to 0 \quad \text{عندما} \quad k \to \infty \qquad \to (18)$$

إن المصفوفة $-M^{-1}N$ لا بد أن تمتلك خاصية بحيث تحقق (18) و بما أن العلاقة (17) تربط بين متجه $e^{(k)}$ و مصفوفة التكرارات $-M^{-1}N$ ، فلا بد من إيجاد طريقة مشتركة لقياس المتجه و المصفوفة . و نحتاج الآن إلي استعراض أنواع مقاييس المصفوفات .

1. أكبر مجموع من الأعمدة (L_1) و هو $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
2. أكبر مجموع من الصفوف (L_∞) وهو $\|A\|_\infty = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
3. القياس الأقليدي L_e حيث لكل مصفوفة بحجم $m \times n$ يكون :

$$\|A\|_e = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} {a_{ij}}^2 \right)^{1/2}$$

4. القياس الشعاعي ، وهو أكبر قيمة مطلقة للقيم الذاتية للمصفوفة A و يرمز له L_2 .

و هذا يقودنا إلي تعريف القيمة الذاتية فنقول أنها القيمة التي تحقق المعادلة

$$AX = \lambda X \quad \to (19)$$

أي أن هناك متجه X (متجه ذاتي) إذا ضرب بالمصفوفة A ينتج نفس المتجه مضروبا بالقيمة λ .

ولقد وجد أن L_2 يعطي أقل قيمة بين المقاييس الأخرى .

و بالعودة إلي المعادلتين (17) و (18) فلأجل أن تتحقق (18) سنطبق L_2 على المصفوفة التكرارية فإذا كان $\|-M^{-1}N\|_2$ أقل من الواحد فإن (18) تتحقق.

نظرية (1) [3]

نفرض أن المصفوفة $(-M^{-1}N)$ لها القيم الذاتية λ_i ($i = 1, \dots, n$) تتقارب الصيغة

$$X^{(k+1)} = M^{-1}(B - NX^{(k)})$$

إذا وفقط إذا كان المقياس الشعاعي للمصفوفة ($-M^{-1}N$) أقل من واحد أي :

$$\|-M^{-1}N\|_2 = \max_{1\le 1\le n}|\lambda_i| < 1$$

بالرغم من قوة النظرية حيث أن شرط التقارب هذا كاف وضروري إلا أن صعوبة إيجاد القيم الذاتية للمصفوفات خاصة بحجم ($n > 3$)، يحول دون الاعتماد عليها في التطبيق. لذا نلجأ إلى تخفيف ذلك الشرط بجعله كاف فقط وسهل التطبيق. وقد لاحظنا في الأمثلة السابقة كيف أن قيمة العناصر القطرية تلعب دورا هاما في التقارب.

نظرية (2) [3]

تتقارب كل من طريقتي جاكوبي و سيدل في حل منظومة المعادلات الخطية

$(\mathrm{AX} = \mathrm{B})$ إذا كانت مصفوفة المعاملات (A) ذات قطر سائد .

البرهان

ليكن (V) هو أحد المتجهات الذاتية للمصفوفة ($-M^{-1}N$) المناظر للقيمة الذاتية(λ) إذاً

$$-M^{-1}NV = \lambda V \quad \to (20)$$

أو

$$(\lambda M + N)V = 0 \quad \to (21)$$

نفرض أن أكبر مركبة للمتجه (V) هي (V_i) ، ($1 \le i \le n$)

إذاً $\quad j \ne i\,,\ \forall j \quad |V_j| \le |V_i|$

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 17, mar. 2021
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد السابع عشر، مارس 2021
Issn :2710- 4141

فبالنسبة لطريقة جاكوبي حيث ($N = L + U \ , M = D$) فتكون المعادلة (21)

بالصورة

$$(\lambda D + L + U)V = 0$$

وتكون المركبة i

$$\lambda a_{ii} v_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} v_j = 0$$

اذاً

$$\lambda = \frac{-\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} v_j}{a_{ii} v_i}$$

$$|\lambda| = \frac{\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} v_j \right|}{|a_{ii}||v_i|}$$

وحيث أن

$$\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} v_j \right| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij} v_i| \leq |v_i| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

ومن شرط الهيمنة القطرية أي المصفوفة ذات القطر السائد يكون $|\lambda| < 1$

واما في طريقة سيدل يكون

$$N = U \ , \ \ M = L + D$$

وتصبح المعادلة (21) بالصورة

$$(\lambda L + \lambda D + U)V = 0$$

والمركبة i تكون

$$\lambda \sum_{j=1}^{i} a_{ij} v_j + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} v_j = 0$$

اذاً

$$\lambda = \frac{-\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} v_j}{\sum_{j=1}^{i} a_{ij} v_j} \qquad \to (22)$$

ومن حقيقة أن $|A + B| \geq |A| - |B|$

فإن

$$\left|\sum_{j=1}^{i} a_{ij} v_j\right| \geq |a_{ii} v_i| - \left|\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} v_j\right|$$

ولكن

$$\left|\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} v_j\right| \leq \sum_{j=1}^{i-1} \left|a_{ij} v_j\right| \leq \left|v_j\right| \sum_{j=1}^{i-1} \left|a_{ij}\right|$$

وعليه فإن:

$$\left|\sum_{j=1}^{i} a_{ij} v_j\right| \geq \left|a_{ij} v_j\right| - \left|v_j\right| \sum_{j=1}^{i-1} \left|a_{ij}\right| = \left|v_j\right| \left(|a_{ii}| - \sum_{j=1}^{i-1} \left|a_{ij}\right|\right)$$

أما بسط المعادلة (22) فيكون :

$$\left|\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} v_j\right| \leq \left|v_j\right| \sum_{j=i+1}^{n} \left|a_{ij}\right|$$

إذاً تصبح المعادلة (22) بالشكل :

$$|\lambda| = \frac{|v_j|\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|}{|v_j|\left(|a_{ii}| - \sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|\right)} \qquad \rightarrow (22)$$

ومن شرط الهيمنة القطرية $|\lambda| < 1$

إن العلاقة بين نظرية (1) ونظرية (2) والتقارب يتوضح في الصيغة:

هيمنة قطرية $\leftarrow \max|\lambda| < 1 \leftrightarrow$ تقارب .

4. المراجع

[1] هب الريح .أ. عبد العالي ، 2009 ، *التحليل العددي (الجزء الأول)* ،مصراتة ، الطبعة الأولي، .
[2] بيردن . ر ، فيري . د ، (ترجمة رمضان جهيمة و كمال أبودية) ، 2001، *التحليل العددي*، ELGA، .
[3] العبيدي. ن. ابراهيم ، 2011 ، *التحليل العددي* ، دار المسيرة للنشر و الطباعة ، الطبعة الأولي .
[4] Burden. R, Faires . D, 2005, *Numerical Analysis*, Brooks/cole, eight edition,.
[5] Linfield. G, and Penny. J, 2012, *Numerical Method Using Matlab*, academic press, third edition.