Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 17, mar. 2021
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد السابع عشر، مارس 2021
Issn :2710- 4141

حساب مؤشر الخطأ بواسطة الباقي النقي لمسألة بواسون

أ .نجية محمد عيسى أبوجلاله
n.abujalala@edu-misuratau.edu.ly

أ .سمية محمد عيسى أبوجلاله
s.abujalala@sci-misuratau.edu.ly

الملخص:

في هذه الورقة تم حساب مقدار الخطأ بين الحل الفعلي والحل التقريبي المتحصل عليه بطريقة العناصر المنتهية وذلك بفرض أن مقدار الخطأ هو الجذر التربيعي لمجموع مربع مؤشر الخطأ على كل مثلث من تثليثة النطاق وكان الهدف هو ايجاد مؤشرات الخطأ الأقل قيمة قدر الإمكان وقد تم حسابها لمسألة بواسون باستخدام بعض الفرضيات والمبرهنات.

كلمات مفتاحية : طريقة العناصر المنتهية ، معادلة بواسون، مؤثرات الخطأ ، الباقي النقي.

Calculation of the error index by pure remainder of the Poisson problem

Abstract:

In this paper, the value of error indicators obtained by applying the finite element method to the Poisson problem is reduced. In order to fined error indicators of the least possible value, the researchers assumed the error value is the square root of the sum of error indicator squared over each triangle of domain triangulation and theorems are utilized to compute the difference between the exact and approximate solutions.

keywords: Finite element method , Poisson problem , Error indicators , Pure residue .

المقدمة: Introduction

تستخدم العديد من الطرق العددية في إيجاد حلول تقريبية للمعادلات التفاضلية الجزئية ومن هذه الطرق طريقة العناصر المنتهية، وكلما كان الباقي بين الحل التقريبي والحل الفعلي أقل كلما تحصلنا على حل تقريبي أفضل . في هذه الورقة تعرضنا إلى فكرة طريقة العناصر المنتهية والتي تعتمد على تقييم الوسط المدروس إلى أجزاء منتهية الأبعاد ليمكن وصف هذه العناصر الصغيرة كلا على حده ومن تم استنتاج سلوك

النطاق وذلك عن طريق تجميع الحلول العددية للأجزاء المشكلة له ومن تم كتابة المعادلة الجزئية الناقصة على الصيغة الضعيفة وتعريف مقدار الخطأ عن طريق التقدير اللاحق وفي البند 1–2 درسنا مسألة بواسون وقمنا بحساب مؤشر الخطأ عن طريق الباقي النقي بين الحل التقريبي والحل الحقيقي.

1–1 تمهيد Preface [1]:

تستخدم طريقة العناصر المنتهية لتقريب الحلول للمعادلات التفاضلية الجزئية وهي تعتمد على تقريب الحل بواسطة دوال متعددات حدود على كل عنصر من تثليثة النطاق الذي يكون مفتوح ومحدود ومترابط من $\Re^n$ حيث $n = 2$ أو $n = 3$.

تثليثة النطاق " التي يرمز لها بالرمز T هي عائلة من العناصر K من Ω بحيث :

1–كل K يكون مثلث مغلق إذاكانت $n = 2$ أو شكل رباعي بأربعة وجوه متساوية ويكون مثلثات إذاكانت $n = 3$.

2- $\bigcup_{K\in T} K = \overline{\Omega}$

3– إذاكان K_1, K_2 عنصرين منفصلين من T إذاً $K_1 \cap K_2$ يكون :

- مجموعة خالية
- قمة من K_1 وقمة من K_2
- يكون ضلع من K_1 و ضلع من K_2 إذاكان $n = 2$
- يكون وجه من K_1 و وجه من K_2 إذاكان $n = 3$

نرمز للتثليثة بالرمز T_h بدلاً من T حيث

$$h = max_{K\in T}(diametr\ of\ K)$$

في طريقة العناصر المنتهية نبحث في تقريب عددي لحل معادلة تفاضلية جزئية وهذه المعادلة يمكن وضعها على الصيغة الضعيفة .

نعتبر أن لدينا معادلة تفاضلية ناقصة فالصيغة الضعيفة هي :

أوجد عنصر u من فضاء هلبرت X بحيث :

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in X \tag{1}$$

حيث $a(.,.)$ تكون ثنائية الخطية ومتصلة على $X \times X$ ، "$X - ellptic$ يعني يوجد $\alpha > 0$

بحيث لكل $v \in X$ لدينا $a(v,v) \geq \alpha\|v\|_X^2$" و L خطية متصلة على X .

نعتبر أيضاً تقريبها بواسطة العناصر المنتهية :

أوجد عنصر u_h من فضاء جزئي X_h "فضاء العناصر المنتهية من الدرجة k مرتبطة بالتثليثة T_h من Ω من X " بحيث :

$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in X_h \tag{2}$$

نفرض $(T_h)_h$ عائلة من التثليثات من نطاق Ω منتظمة " يعني حاصل قسمة قطر أي عنصر من المثلثات على قطر دائرة مرسومة يكون محدود من أعلى بثابت مستقل عن h والدوال من X_h تكون متعددات حدود على كل T_h ومتصلة على Ω .

تقدير بديهي للخطأ بين الحل الحقيقي والحل التقريبي من ناحية h ومن الإنتظامية العامة للحل الدقيق تكتب :

$$\|u - u_h\|_X \leq F(h, u, L) \tag{3}$$

وجودها يضمن تقارب الطريقة لأن الحل u يكون منتظم كفاية .

تقدير لاحق لقيمة الخطأ يكتب على الصورة :

$$\|u - u_h\|_X \leq G(h, u_h, L) \tag{4}$$

الطرف الثاني يمكن حسابه بصراحة :

ليكن $\eta = G(h, u_h, L)$ تسمى مقدر الخطأ وتستخدم لضمان موثوقية الطريقة .

نفرض أنها تكتب على الصورة :

$$\eta = \left(\sum_{K \in T_h} \eta(K)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (5)$$

إذاً القيم $\eta(K)$, $K \in T_h$ تشكل مؤشر الخطأ وهي لا تعتمد إلا على h وليس على u .

الهدف هو إيجاد مؤشرات خطأ تسمح بتحسين الشبكة المتوافقة جيداً مع الحل الذي نريد الاقتراب منه " أي إيجاد $\eta(K)$ الأصغر قدر الإمكان " .

1–2 مؤشر بواسطة الباقي النقي [2] Indicated by pure remainder

نعتبر المسألة :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & ,\Omega \\ u = 0 & ,\partial\Omega \end{cases} \qquad (6)$$

حيث Ω تكون مفتوحة ومحدودة من $\mathcal{R}^2$ ، f تكون معطاه في $H^{-1}(\Omega)$

الصيغة الضعيفة لهذه المسألة :

أوجد في $H_0^1(\Omega)$ حيث :

$$a(u,v) = L(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad (7)$$ بحيث

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx \qquad , L(v) = \int_\Omega f v \quad dx$$

حيث $\|.\|_{H^1(\Omega)}$ نظيم الفضاء $H_0^1(\Omega)$

نعرف على Ω الذي نفرضه مضلع عائلة $(T_h)_h$ من التثليثات " بواسطة مثلثات " ونفرض أن العائلة $(T_h)_h$ منتظمة و أن :

$$X_h = \left\{ v_h \in C^0(\overline{\Omega}); K \in, T_h, v_{h_{|\partial\Omega}} = 0 \, , v_{h_{|K}} \in P_k(K) \right\} \qquad (8)$$

لكل $k \geq 1$ محددة ، P_k ترمز لفضاء متعددات حدود من الدرجة أقل من أو تساوي k على K .

تكتب المسألة المنقطعة على الصورة :

أوجد u_h من X_h بحيث :

$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \qquad \forall v_h \in X_h \qquad (9)$$ حيث

$$a(u_h, v_h) = \int_\Omega \nabla u_h . \nabla v_h \, dx \qquad , L(v_h) = \int_\Omega f v_h \, dx$$

a تكون $H_0^1(\Omega) - elliptic$ ، إذاً يوجد $\alpha > 0$ بحيث :

$$\alpha \|u - u_h\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq$$
$$a(u - u_h, u - u_h)$$

$$\leq a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h)$$
$$\forall v_h \in X_h$$

لدينا :

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad , \; v_h, u_h \in X_h \subset H_0^1(\Omega)$$

إذاً

$$a(u, v_h - u_h) = L(v_h - u_h)$$
$$a(u_h, v_h - u_h) = L(v_h - u_h)$$

إذاً $a(u - u_h, v_h - u_h) = 0$ ويكون :

$$\alpha \|u - u_h\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq a(u, u - v_h) - a(u_h, u - v_h)$$

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University -Libya, Vol. 1, No. 17, mar. 2021
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد السابع عشر، مارس 2021
Issn :2710- 4141

$$\leq \int_{\Omega} f(u-v_h) - \int_{\Omega} \nabla u_h . \nabla (u-v_h)$$

$$\leq \sum_{K\in T_h} \int_K f(u-v_h) - \sum_{K\in T_h} \int_K \nabla u_h . \nabla (u-v_h)$$

بتطبيق صيغة جرين على كل $K \in T_h$

$$\int_K \nabla u_h . \nabla (u-v_h) = \int_K -\Delta u_h (u-v_h) + \int_{\partial K} (\nabla u_h . n)(u-v_h) d\sigma$$

حيث n المتجه الطبيعي إذاً:

$$\alpha \|u-u_h\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

$$\leq \sum_{K\in T_h} \int_K (f+\Delta u_h)(u-v_h)$$

$$-\sum_{K\in T_h} \int_{\partial K} \frac{\partial u_h}{\partial n}(u-v_h)$$

نفرض أن S_h مجموعة أضلاع عناصر K من T_h والتي لا تكون في $\partial\Omega$ ونرمز بـ $[.]$ القفز من خلال عنصر من S_h "إذاكان $K,\acute{K}$ عنصرين من T_h مشتركان في الضلع F ، القفزة للدالة v من خلال F يكون المجموع

$v_{|_K} n_K + v_{|_{\acute{K}}} n_{\acute{K}}$ حيث $n_{\acute{K}}, n_K$ متجهات الوحدة الطبيعية عند F خارجة من $K,\acute{K}$ بالترتيب " إذاً:

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 17, mar. 2021
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد السابع عشر، مارس 2021
Issn :2710- 4141

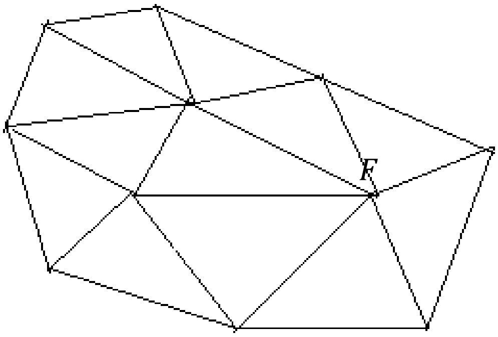
$$\alpha\|u-u_h\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \sum_{K\in T_h}\int_K (f+\Delta u_h)(u-v_h) - \sum_{F\in S_h}\int_F \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right](u-v_h)$$

$$\leq \sum_{K\in T_h}\|f+\Delta u_h\|_{L^2(K)}\|u-v_h\|_{L^2(K)} + \sum_{F\in S_h}\left\|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]\right\|_{L^2(F)}\|u-v_h\|_{L^2(F)}$$

نشير بـ h_K لبعد K و بـ h_F لبعد الضلع F من K ، من أجل كل عنصر K من T_h تعتبر Δ_K اتحاد المثلثات $\acute{K}$ من T_h التي تقاطعها مع K ليست مجموعة خالية وأيضاً من أجل كل ضلع F من K تعتبر Δ_F اتحاد المثلثات $\acute{K}$ من T_h التي تقاطعها مع F ليست مجموعة خالية

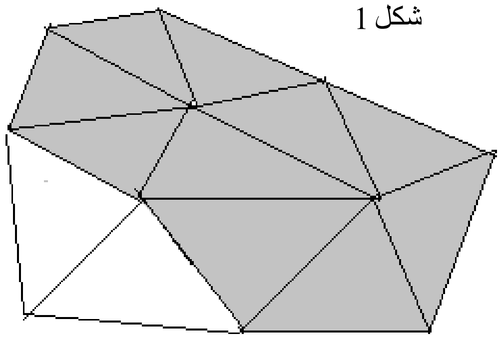
Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 17, mar. 2021
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد السابع عشر، مارس 2021
Issn :2710- 4141

K



Δ_K
شكل 2

Δ_F
شكل 1



نذكر بعض الخصائص للمؤثر $\prod_h$ للإسقاط $L^2 - local$ معرف من $L^2(\Omega)$ على X_h : لكل دالة v من $H^1(\Omega)$ يكون :

$$\|v - \textstyle\prod_h v\|_{L^2(K)} \leq c h_K \|v\|_{H^1(\Delta_K)} \tag{10}$$

$$\|v - \textstyle\prod_h v\|_{L^2(F)} \leq c h_F^{\frac{1}{2}} \|v\|_{H^1(\Delta_F)} \tag{11}$$

نختار

$$v_h = u_h + \textstyle\prod_h (u - u_h) \in X_h$$

إذاً

$$\|v - v_h\|_{L^2(K)} \leq c h_K \|u - u_h\|_{H^1(\Delta_K)}$$

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 17, mar. 2021
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد السابع عشر، مارس 2021
Issn :2710- 4141

$$\|u-v_h\|_{L^2(F)} \le c h_F^{\frac{1}{2}} \|u-u_h\|_{H^1(\Delta_F)}$$

فيما يلي سنرمز بـــ

$a \prec b$ بدلاً من $a \le cb$ حيث c مستقل عن b إذاً

$$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \prec \sum_{K\in T_h} \|f+\Delta u_h\|_{L^2(K)} h_K \|u-u_h\|_{H^1(\Delta K)} + \sum_{F\in S_h} \left\|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]\right\|_{L^2(F)} h_F^{\frac{1}{2}} \|u-u_h\|_{H^1(\Delta F)}$$

$$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \prec \sqrt{\sum_{K\in T_h} {h_K}^2 \|f+\Delta u_h\|_{L^2(K)}^2} \cdot \sqrt{\sum_{K\in T_h} \|u-u_h\|_{H^1(\Delta K)}^2} + \sqrt{\sum_{F\in S_h} h_F \left\|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]\right\|_{L^2(F)}^2} \cdot \sqrt{\sum_{F\in S_h} \|u-u_h\|_{H^1(\Delta F)}^2}$$

لأن $\sum a_i b_i \le \sqrt{a_i^2} \cdot \sqrt{b_i^2}$

نلاحظ أيضاً أن كل عنصر من T_h (أو من S_h) موجود فقط في عدد منتهي ، بصرف النظر عن h ، من ΔK (أو من ΔF) إذاً

$$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \prec \sqrt{\sum_{K\in T_h} {h_K}^2 \|f+\Delta u_h\|^2_{L^2(K)}} + \sqrt{\sum_{F\in S_h} h_F \left\|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]\right\|^2_{L^2(F)}}$$

$$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \prec \sqrt{\sum_{K\in T_h} {h_K}^2 \|f+\Delta u_h\|^2_{L^2(K)} + \sum_{F\in S_h} h_F \left\|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]\right\|^2_{L^2(F)}}$$

لأن $\sqrt{a}+\sqrt{b} \prec \sqrt{a+b}$

نرمز بـ $S(K)$ لمجموعة جوانب K التي لا تكون في $\partial\Omega$ إذاً:

$$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \prec \sqrt{\sum_{K\in T_h} ({h_K}^2 \|f+\Delta u_h\|^2_{L^2(K)} + \sum_{F\in S(K)} h_F \left\|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]\right\|^2_{L^2(F)})}$$

$$\prec \sqrt{\sum_{K\in T_h} (h_K \|f+\Delta u_h\|_{L^2(K)} + \sum_{F\in S(K)} h_F^{\frac{1}{2}} \left\|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]\right\|_{L^2(F)})^2}$$

لأن $a^2+b^2+c^2+d^2 \leq (a+b+c+d)^2$

مبرهنة 1 [2] : مع التعريف

$$\eta(\mathrm{K}) = h_K \|f + \Delta u_h\|_{L^2(K)} + \sum_{F \in S(K)} h_F^{\frac{1}{2}} \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right] \right\|_{L^2(F)} \qquad (12)$$

لدينا التقدير

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \prec \left(\sum_{K \in T_h} \eta(\mathrm{K})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (13)$$

الآن نبرهن العكس . من أجل البرهان نفرض أن دالة ما f_{mh} تتقارب إلى f في الفضاء

$$W_h = \left\{ f_h \in L^2(\Omega)\,, \forall K \in T_h, f_{h_{|K}} \in P_m(K) \right\} \qquad (14)$$

نربط كل K من T_h بالنطاق ω_K هو اتحاد 4 مثلثات أو أكثر لها على الأقل وجه من بعد 1 مشترك مع K من أجل كل F في S_h ونرمز أيضاً بـ ω_F لإتحاد عنصرين من K تحتوي على F داخل حدودها

مبرهنة 2 [3] : مع التعريف (12) لدينا التقدير :

$$\eta(\mathrm{K}) \prec \|u - u_h\|_{H^1(\omega_K)} + h_K \|f - f_{mh}\|_{L^2(\omega_K)} \qquad (15)$$

اثبات هذه الفرضية يعتمد على دراسة الدالة ε المعرفة لكل دالة w من $H_0^1(\omega_K)$ بواسطة :

$$\varepsilon(w) = \sum_{\acute{K} \in \omega_K} \int_{\acute{K}} (f_{mh} + \Delta u_h) w - \sum_{F \in S(K)} \int_F \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right] w \qquad (16)$$

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 17, mar. 2021
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد السابع عشر، مارس 2021
Issn :2710- 4141

$$= \sum_{\acute{K}\subset\omega_K} \Big(\int_{\acute{K}} (f_{mh}w - \int_{\acute{K}} fw + \int_{\acute{K}} fw + \int_{\acute{k}} \Delta u_h w\Big)$$

$$- \sum_{F\in S(K)} \int_F \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] w$$

$$= \sum_{\acute{K}\subset\omega_K} \Big(-\int_{\acute{K}} (f - f_{mh})w - \int_{\acute{K}} \Delta u w + \int_{\acute{K}} \Delta u_h w\Big)$$

$$- \sum_{F\in S(K)} \int_F \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] w$$

$$= \sum_{\acute{K}\subset\omega_K} \Big(-\int_{\acute{K}} (f - f_{mh})w - \int_{\partial\acute{K}} \frac{\partial u}{\partial n} w + \int_{\acute{K}} \nabla u.\nabla w + \int_{\partial\acute{K}} \frac{\partial u_h}{\partial n} w$$

$$- \int_{\acute{K}} \nabla u_h.\nabla w\Big) - \sum_{F\in S(K)} \int_F \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] w$$

$$= \int_{\omega_K} \nabla(u - u_h).\nabla w - \int_{\omega_K} (f - f_{mh})w - \sum_{\acute{K}\subset\omega_K} \int_{\partial\acute{K}} \frac{\partial u}{\partial n} w$$

$$+ \sum_{\acute{K}\subset\omega_K} \int_{\partial\acute{K}} \frac{\partial u_h}{\partial n} w - \sum_{F\in S(K)} \int_F \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] w$$

لدينا

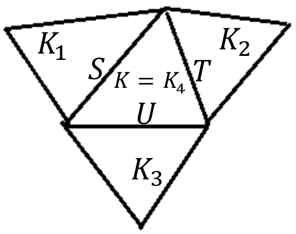
Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 17, mar. 2021
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد السابع عشر، مارس 2021
Issn :2710- 4141

$$-\sum_{\acute{K}\subset\omega_K}\int_{\partial\acute{K}}\frac{\partial u}{\partial n}w=-\int_S\left(\frac{\partial u}{\partial n_4}+\frac{\partial u}{\partial n_1}\right)w-\int_T\left(\frac{\partial u}{\partial n_4}+\frac{\partial u}{\partial n_2}\right)w$$

$$-\int_U\left(\frac{\partial u}{\partial n_4}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u}{\partial n_3}\right)w \qquad (*)$$

لأن $w\in H_0^1(\omega_K)$



ω_i
شكل 3

وبما أن دالة منتظمة لدينا :

$$\nabla u.n_1=-\nabla u.n_4\ ,\nabla u.n_2=-\nabla u.n_4\ ,\nabla u.n_3=-\nabla u.n_4$$

إذاً:

$$\frac{\partial u}{\partial n_1}=-\frac{\partial u}{\partial n_4}\ ,\frac{\partial u}{\partial n_2}=-\frac{\partial u}{\partial n_4}\ ,\frac{\partial u}{\partial n_3}=-\frac{\partial u}{\partial n_4}$$

ويكون :

$$-\sum_{\acute{K}\subset\omega_K}\int_{\partial\acute{K}}\frac{\partial u_h}{\partial n}w=0$$

$$\sum_{\acute{K}\subset\omega_K}\int_{\partial\acute{K}}\frac{\partial u_h}{\partial n}w=\int_S\left(\frac{\partial u_h}{\partial n_4}+\frac{\partial u_h}{\partial n_1}\right)w+\int_T\left(\frac{\partial u_h}{\partial n_4}+\frac{\partial u_h}{\partial n_2}\right)w$$

$$+\int_U \left(\frac{\partial u_h}{\partial n_4} + \frac{\partial u_h}{\partial n_3}\right) w \qquad (**)$$

وبما أن u_h متعددة حدود لدينا :

$$\frac{\partial u_h}{\partial n_4} + \frac{\partial u_h}{\partial n_1} = \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] \; on\, S, \frac{\partial u_h}{\partial n_4} + \frac{\partial u_h}{\partial n_2} = \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] \; on\, T,$$

$$\frac{\partial u_h}{\partial n_4} + \frac{\partial u_h}{\partial n_3} = \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] \; on\, U$$

إذاً

$$\sum_{\acute{K}\subset\omega_K} \int_{\partial\acute{K}} \frac{\partial u_h}{\partial n} w = \sum_{F\in S(K)} \int_F \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] w$$

و

$$\varepsilon(w) = \int_{\omega_K} \nabla(u - u_h).\nabla w - \int_{\omega_K} (f - f_{mh}) w + \sum_{F\in S(K)} \int_F \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] w - \sum_{F\in S(K)} \int_F \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] w$$

إذاً يكون :

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 17, mar. 2021
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد السابع عشر، مارس 2021
Issn :2710- 4141

$$\varepsilon(w) = \int_{\omega_K} \nabla(u - u_h).\nabla w$$

$$- \int_{\omega_K} (f - f_{mh})w \qquad (17)$$

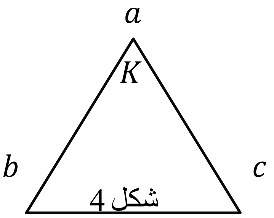
تقدم بعض الفرضيات :

فرضية 1 [3]: لكل K من T_h نثبت متعددة حدود ψ_K من $P_3(K)$ صفرية على $\partial \mathrm{K}$ ولها قيم بين $1,0$ على K بمعنى

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in P_1(x): \psi_K(x) = \lambda_1(x).\lambda_2(x).\lambda_3(x) \quad on \;\; K$$

$\lambda_1(x) = 1$ عند a و $\lambda_1(x) = 0$ عند c, b و $\lambda_2(x) = 1$ عند b و

$\lambda_2(x) = 0$ عند a, c و $\lambda_3(x) = 1$ عند c و $\lambda_3(x) = 0$ عند a, b



شكل 4

ونرمز أيضاً لامتدادها بواسطة الصفر على Ω بـ ψ_K

فرضية 2 [4] :

لكل F في S_h ، نثبت دالة ψ_F متصلة و $supp(\psi_F) = \overline{\{K \in \omega_F : \psi_F \neq 0\}}$ يكون داخل ω_F ولها قيم بين $1,0$ على ω_F وهي متعددة حدود من الدرجة أقل من أو تساوي 2 على كل عنصرين من ω_F ، ونعتبر أيضاً P_F مؤثر امتداد لمتعددات الحدود المعرفة على F إلى متعددات حدود معرفة على عنصرين من ω_F:

على المثلث المرجعي ذو الرؤوس $(0,0), (1,0), (0,1)$ صورة متعددة حدود في x على الضلع $\hat{F} = [0,1] \times \{0\}$ بواسطة $\hat{P}$ تكون امتداد لنفسها :

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 17, mar. 2021
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد السابع عشر، مارس 2021
Issn :2710- 4141

المؤثر P_F مبني على كل مثلث K داخل ω_F بواسطة الصيغة $(P_F v)\circ(F_K)=\hat{P}(v\circ F_K)$ حيث F_K راسم ناعم ذات محدد موجب ترسل $\hat{K}$ على K و $\hat{F}$ على F ، وهو ممتد بواسطة الصفر في Ω

البرهان :

سوف نكبر كل حد من حدود $\eta(\mathrm{K})$ على التوالي.

1- لكل K من T_h وبالمرور بالعنصر المرجعي وباستخدام حقيقة كل النظم تكون متكافئة على $P_{sup\{k-2,m\}+3}(\hat{K})$ لدينا :

$$\forall\varphi\in P_{sup\{k-2,m\}}(K), c\|\psi_K\varphi\|_{L^2(K)}\le\|\varphi\|_{L^2(K)}\le\acute{c}\left\|\psi_K^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_{L^2(K)}\qquad(18)$$

في الواقع لدينا :

$$\|\psi_K\varphi\|_{L^2(K)}=\int_K\psi_K^2\varphi^2\le\int_K\varphi^2=\|\varphi\|_{L^2(K)}$$

والدالة $N:\varphi\to\left\|\psi_K^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_{L^2(K)}$

تكون نظم على $P_{sup\{k-2,m\}}(K)$

نفرض أن : $w_K=\psi_K(f_{mh}+\Delta u_h)$ من المتباينة (18) يكون لدينا :

$$\|f_{mh}+\Delta u_h\|_{L^2(K)}^2\prec\left\|\psi_K^{\frac{1}{2}}(f_{mh}+\Delta u_h)\right\|_{L^2(K)}^2$$

لأن $f_{mh}\in P_m$ حيث $\Delta u_h\in P_{k-2}$ إذاً $(f_{mh}+\Delta u_h)\in P_{sup\{k-2,m\}}$ ويكون:

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 17, mar. 2021
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد السابع عشر، مارس 2021
Issn :2710- 4141

$$\|f_{mh}+\Delta u_h\|_{L^2(K)}^2 \prec \int_K \psi_K (f_{mh}+\Delta u_h)^2$$

$$= \int_K (f_{mh}+\Delta u_h) w_K = \varepsilon(w_K)$$

لأن

$$\sum_{F\in S(K)} \int_F \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] w_K = \sum_{F\in S(K)} \int_F \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] \psi_K (f_{mh}+\Delta u_h) = 0$$

وذلك لأن $\psi_K = 0$ علي ∂K ويكون :

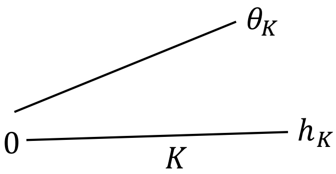
$$\|f_{mh}+\Delta u_h\|_{L^2(K)}^2 \prec \int_K \nabla(u-u_h).\nabla w_K - \int_K (f-f_{mh}).w_K$$

نستخدم متباينة المعكوس :

$$\|\nabla w_K\|_{L^2(K)} \le c h_K^{-1} \|w_K\|_{L^2(K)}$$

نبرهن هذه المتباينة في حالة $k = 1$ في البعد 1 "وبالتالي يتم تعميمها "

نأخذ θ_K بحيث $\theta_K(x) = a + bx$



شكل 5

حيث $\left\|\acute{\theta}_K\right\|_{L^2(K)}^2 = \int_0^{h_K} \left(\acute{\theta}_K\right)^2 = b^2 h_K$

$$\|\theta_K\|_{L^2(K)}^2 = \int_0^{h_K} (\theta_K)^2 = \int_0^{h_K} (a+bx)^2 \ge \frac{b^2}{3} h_K^3 = \frac{h_K^2}{3} \left\|\acute{\theta}_K\right\|_{L^2(K)}^2$$

إذاً $\left\|\acute{\theta}_K\right\|_{L^2(K)} \prec h_K^{-1} \|\theta_K\|_{L^2(K)}$ ويكون

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University -Libya, Vol. 1, No. 17, mar. 2021
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، السنة السابعة، المجلد السابع، العدد السابع عشر، مارس 2021
Issn :2710- 4141

$$\|f_{mh}+\Delta u_h\|^2_{L^2(K)}$$
$$\prec \|\nabla(u-u_h)\|_{L^2(K)}\|\nabla w_K\|_{L^2(K)}+\|f-f_{mh}\|_{L^2(K)}\|w_K\|_{L^2(K)}$$
$$\prec (h_K^{-1}\|\nabla(u-u_h)\|_{L^2(K)}+\|f-f_{mh}\|_{L^2(K)})\|w_K\|_{L^2(K)}$$
$$\prec (h_K^{-1}\|\nabla(u-u_h)\|_{L^2(K)}+\|f-f_{mh}\|_{L^2(K)})\|\psi_K(f_{mh}+\Delta u_h)\|_{L^2(K)}$$
$$\prec (h_K^{-1}\|\nabla(u-u_h)\|_{L^2(K)}+\|f-f_{mh}\|_{L^2(K)})\|(f_{mh}+\Delta u_h)\|_{L^2(K)}$$

ويكون :

$$\|f_{mh}+\Delta u_h\|_{L^2(K)} \prec h_K^{-1}\|u-u_h\|_{H^1(K)}+\|f-f_{mh}\|_{L^2(K)} \qquad (19)$$

2- لكل K من T_h ولكل F من $S(K)$ وبالمرور إلى العنصر المرجعي وباستخدام الحقيقة أن جميع النظم تكون متكافئة في البعد المنتهي لدينا :

$$\forall \varphi \in P_{k-2}(F), c\|\varphi\|_{L^2(F)} \le \left\|\psi_F^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_{L^2(F)} \qquad (20)$$

و

$$\|\psi_F P_F \varphi\|_{L^2(\omega_F)} \le c h_F^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{L^2(F)} \qquad (21)$$

الفكرة بفرض

$$w_F=\psi_F P_F\left(\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]\right)$$

ونستنتج من (20) ، (21) أن:

$$\left\|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]\right\|_{L^2(F)}^2 \prec \left\|\psi_F^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]\right\|_{L^2(F)}^2$$

$$= \int_F \psi_F \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]^2$$

$$= \int_F \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] w_F$$

$$= \sum_{\acute{K}\subset\omega_F} \int_{\acute{K}} (f_{mh} + \Delta u_h) w_F - \varepsilon(w_F)$$

$$= \left|\varepsilon(w_F) - \sum_{\acute{K}\subset\omega_F} \int_{\acute{K}} (f_{mh} + \Delta u_h) w_F\right|$$

$$\prec \|\nabla(u-u_h)\|_{L^2(\omega_F)} \|\nabla w_F\|_{L^2(\omega_F)} + \|f - f_{mh}\|_{L^2(\omega_F)} \|w_F\|_{L^2(\omega_F)}$$

$$+ \sum_{\acute{K}\subset\omega_F} \|f_{mh} + \Delta u_h\|_{L^2(\acute{K})} \|w_F\|_{L^2(\acute{K})}$$

نستخدم متباينة المعكوس (بوضع $h_K \sim h_F$ لكل K داخل ω_F)

$$\left\|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]\right\|_{L^2(F)}^2 \prec \quad (h_K^{-1}\|u-u_h\|_{H^1(\omega_F)} + \|f - f_{mh}\|_{L^2(\omega_F)} +$$

$$\sum_{\acute{K}\subset\omega_F} (h_{\acute{K}}^{-1}\|u-u_h\|_{H^1(\acute{K})}$$

$$+ \|f - f_{mh}\|_{L^2(\acute{K})})) \left\|\psi_F P_F\left(\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]\right)\right\|_{L^2(\omega_F)}$$

$$\left\|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]\right\|_{L^2(F)}^2 \prec \; h_K^{\frac{1}{2}}(h_K^{-1}\|u-u_h\|_{H^1(\omega_F)}+\|f-f_{mh}\|_{L^2(\omega_F)}+$$

$$\sum_{\acute{K}\subset\omega_F}\left(h_{\acute{K}}^{-1}\|u-u_h\|_{H^1(\acute{K})}+\|f-f_{mh}\|_{L^2(\acute{K})}\right))\left\|\left(\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]\right)\right\|_{L^2(F)}$$

لدينا

$$\sum_{\acute{K}\subset\omega_F}\left(h_{\acute{K}}^{-1}\|u-u_h\|_{H^1(\acute{K})}+\|f-f_{mh}\|_{L^2(\acute{K})}\right)$$
$$\prec (h_K^{-1}\|u-u_h\|_{H^1(\omega_K)}+\|f-f_{mh}\|_{L^2(\omega_K)}$$

إذاً

$$\left\|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]\right\|_{L^2(F)}$$
$$\prec \; h_K^{\frac{1}{2}}\left(h_K^{-1}\|u-u_h\|_{H^1(\omega_K)} + \|f-f_{mh}\|_{L^2(\omega_K)}\right) \qquad (22)$$

ولدينا

$$\eta(K)=h_K\|f+\Delta u_h\|_{L^2(K)}+\sum_{F\in S(K)} h_F^{\frac{1}{2}}\left\|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]\right\|_{L^2(F)}$$

ونستنتج من (19) ، (22) أن :

$$\eta(K)\prec\|u-u_h\|_{H^1(K)}+h_K\|f-f_{mh}\|_{L^2(K)} + \sum_{F\in S(K)} h_K\left(h_K^{-1}\|u-u_h\|_{H^1(\omega_K)} + \|f-f_{mh}\|_{L^2(\omega_K)}\right)$$

إذاً

$$\eta(K)\prec\|u-u_h\|_{H^1(\omega_K)}+h_K\|f-f_{mh}\|_{L^2(\omega_K)}$$

References المـــــــــراجع

1- C.Bernardi , B.Métivet , R.Verfüth –*Analyse numérique d'indicateurs d'erreuer , dans Maillage et adaptation .* édité par P-L . George , Hermés (2001).

2- P.-A.Raviart , J.-M. Thomas- *Introduction á I'analyse numérique des equations aux derives partielles . Collection Mathématiques Appliquées maîtrise .* Masson , paris , 1983.

3- N.Serge –*Analyse numérique et equations aux derives partielles.*Dound, paris, 2000.

4- جهيمة .ر، أبودية . ك، 2001 ، التحليل العددي ، منشورات ELGA .