

طريقة الشبكتين لحل المعادلات التفاضلية الجزئية الإهليجية ومقارنتها بطريقتي جاوس سيدل وSOR أ. سمية سالم التاجوري د. زينب علي الشقماني

جامعة مصراتة - كلية التربية - قسم الرياضيات

Email: s.altajouri@edu.misuratau.edu.ly z.elshegmani@edu.misuratau.edu.ly

الملخص

تتناول هذه الورقة البحثية دراسة طريقة الشبكتين لحل المعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية في بعدين باستخدام طريقة الفروق النهائية، حيث ينتج عن ذلك نظام خطي يتم حله بالطرق التكرارية الأساسية (جاوس سيدل، SOR)، ثم تُطبَّق طريقة الشبكتين على هذه الطرق التكرارية بهدف تسريع عملية التقارب، كما سيتم إجراء مقارنة عددية بين طريقة الشبكتين وطريقتي جاوس سيدل وSOR من حيث سرعة التقارب، وعدد التكرارات المطلوبة، ودقة الحل العددي، وذلك لإبراز كفاءة طريقة الشبكتين في حل الأنظمة الخطية.

الكلمات المفتاحية: المعادلات الإهليجية، الفروق النهائية، طريقة الشبكتين.

Two- Grid Method for Solving Elliptic Partial Differential Equations and its Comparison with Gauss–Seidel and SOR Methods

Sumaia Salem Altajouri

Zieneb Ali Elshegmani

z.elshegmani@edu.misuratau.edu.ly s.altajouri@edu.misuratau.edu.ly

Faculty of Education, Misurata University, Misurata, Libya

Abstract

This paper investigates the two-grid method for solving elliptic partial differential equations using the finite difference method, which leads to a linear system that is solved by the Gauss–Seidel and Successive Over-Relaxation (SOR) methods. The two-grid method is then applied to these iterative schemes in order to accelerate the convergence process. A numerical comparison is carried out between the two-grid method and the Gauss–Seidel and SOR methods in terms of the convergence rate, number of iterations, and accuracy of the numerical solution, in order to demonstrate the efficiency of the two-grid method in solving linear systems.

Keywords: Elliptic equations, finite differences, two-grid method.

1. المقدمة:

تُعَدّ المعادلات التفاضلية الجزئية من أهم الأدوات الرياضية المستخدمة في العديد من الظواهر الفيزيائية والهندسية، مثل انتقال الحرارة، انتشار الموجات، وحركة الموائع. ونظرًا لصعوبة الحصول

على حلول تحليلية دقيقة لمعظم هذه المعادلات، لهذا استخدمت الطرق العددية للحصول على حلول تقريبية دقيقة.

ومن أهم هذه الطرق، طريقة الفروق المحددة تعتبر وسيلة فعّالة لتحويل المعادلات التفاضلية الجزئية إلى أنظمة خطية كبيرة، والتي يتم حلها باستخدام طرق تكرارية مثل: طريقة جاوس سيدل وطريقة الاسترخاء المتتالي (SOR)، رغم ما تعانیه من بطء في التقارب عند استخدام شبكات دقيقة.

في هذا السياق ظهرت طريقة الشبكتين كأحد الأساليب الفعّالة لتسريع تقارب الحل، حيث تعتمد على حل تقريبي على شبكة خشنة ثم تصحيح هذا الحل على شبكة أدق، مما يؤدي إلى تقليل عدد التكرارات وتحسين الكفاءة الحسابية.

ومن أهم الدراسات في هذا الموضوع، ما قدّمه (Brandt 1977) عند وضع الأسس الأولى لطرق متعددة الشبكات، حيث بيّن أن نقل المعلومات بين الشبكات الخشنة والدقيقة يساهم في تسريع التقارب بشكل كبير، كما قام (Hackbusch 1994) و (Wesseling 1995) بدراسة الخصائص النظرية لطريقة الشبكتين وطرق متعددة الشبكات، وأثبتوا أن معدل التقارب لا يعتمد على حجم الشبكة قيمة (h)، وهو ما يُعد ميزة أساسية لهذه الطرق، في بداية الألفية ساهم (Trottenberg 2000) وآخرون في نشر كتب مرجعية تناولت طريقة الشبكتين بالتفصيل.

وفي الدراسات الحديثة قدم (Chen and Zhang 2023) طريقة شبكتين لحل معادلات الانتشار – الموجة الكسرية غير الخطية ثنائية البعد، وأظهرت نتائجهم دقة عالية وتقارباً سريعاً. كما طوّرت (Wang 2024) وآخرون خوارزمية شبكتين باستخدام طريقة العناصر المحددة لحل معادلة شرودنغر الزمنية ثنائية البعد، وأثبتوا كفاءة الطريقة من حيث الاستقرار والدقة العددية، كما اقترحت دراسة (Stolk 2025) طريقة الشبكتين المحسنة لمعادلة هيلمهولتز باستخدام العناصر النهائية، تظهر فعالية ودقة عالية في حل المعادلات التفاضلية المعقدة.

2. هيكل الشبكة (Grid structure) (Fulton et. all 1986)

• الشبكة في بعد واحد:

هو تقسيم المجال الخطي $\Omega=[a,b]$ إلى أجزاء متساوية الطول (h) حيث كل نقطة من نقاط الشبكة تمثل كالاتي:

$$x_i = a + ih \quad , i = 0,1,2,3, \dots, N$$

$$h = \frac{b-a}{N} \text{ طول خطوة الشبكة و } N \text{ عدد الأجزاء.}$$



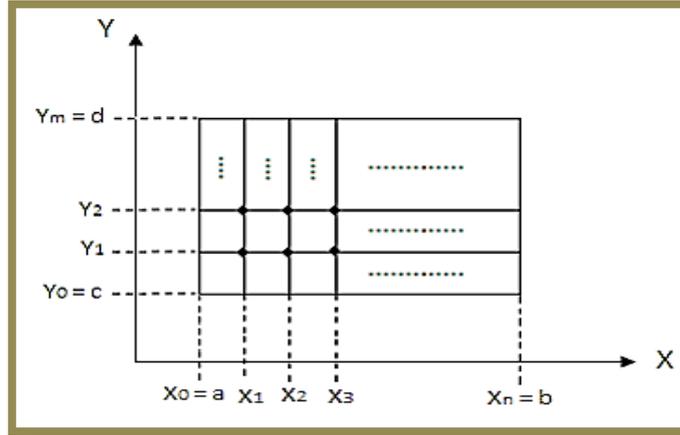
الشكل (1) يوضح شبكة الفروق النهائية في بعد واحد

- الشبكة في بعدين:

هو تقسيم المجال المستطيل $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ إلى شبكة من المربعات ذات خطوة h_x, h_y حيث كل نقطة من نقاط الشبكة تمثل كالاتي:

$$h_x = \frac{b-a}{N_x}, \quad h_y = \frac{d-c}{N_y}$$

$$(x_i, y_j) = (a + ih_x, c + jh_y), i = 0, 1, \dots, N_x, j = 0, 1, \dots, N_y$$



الشكل (2) يوضح شبكة الفروق النهائية في بعدين

3. الإستنسل (Stencil) (الشقماني والتاجوري، 2025)

- الإستنسل في بعد واحد:

إذا كانت h هي المسافة بين النقاط في الشبكة، فإن الإستنسل بصفة عامة للنقطة x في الشبكة يكون على

$$[S_k]_h = [\dots S_{-1} S_0 S_1 \dots]$$

لتكن $U_h: \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}$ و $U_h(x) \rightarrow U_h(x)$ فإن العوامل في مجموعة دوال الشبكة تحدد بواسطة:

$$[S_k]_h U_h(x) = \sum_k S_k U_h(x + kh)$$

- الإستنسل في بعدين:

إذا كانت المسافة بين نقاط الشبكة هي h_1 بالنسبة لمحور x و h_2 بالنسبة لمحور y ، فإن الإستنسل

بصفة عامة للنقطة (x, y) في الشبكة يكون على الصيغة:

$$[S_{k_1 k_2}]_{h_1 h_2} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & S_{-1,1} & S_{0,1} & S_{1,1} & \dots \\ \dots & S_{-1,0} & S_{0,0} & S_{1,0} & \dots \\ \dots & S_{-1,-1} & S_{0,-1} & S_{1,-1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, (S_{K_1 K_2}) \in R$$

لتكن

$$(x, y) \rightarrow U_{h_1 h_2}(x, y) \text{ و } U_{h_1 h_2}: \Omega_h \rightarrow R$$

فإن العوامل في مجموعة دوال الشبكة تحدد بواسطة:

$$[S_{k_1 k_2}]_{h_1 h_2} U_{h_1 h_2}(x, y) = \sum_{k_1 k_2} S_{k_1 k_2} U_{h_1 h_2}(x + k_1 h_1, y + k_2 h_2)$$

في التحليل العددي، بالنظر إلى الشبكة المربعة ذات البعد أو البعدين، يكون إستنسل النقاط المنتهية لنقطة في الشبكة عبارة عن إستنسل مكون من النقطة نفسها مع النقاط المجاورة لها. ويتم استخدامه لكتابة تقريب الفروق المحددة للمشتقات عند نقاط الشبكة.

4. الفروق النهائية والمعادلات الإهليجية (هب الريح 2009)

من أشهر المعادلات الإهليجية معادلات لابلاس (Laplace)، بواسون (Poisson)، هليمولتز (Helmholtz) وتكتب كما يلي:
معادلة لابلاس:

$$\nabla^2 u = 0$$

معادلة بواسون:

$$\nabla^2 u = g(x, y)$$

معادلة هليمولتز:

$$\nabla^2 u + f(x, y)u = (x, y)$$

حيث إن:

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}$$

إذا طبقنا الفرق المركزي من الدرجة الثانية على معادلة بواسون يمكن الحصول على معادلة الفروق التالية:

$$\frac{1}{h^2} (u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) - 4u(x, y)) = g(x, y)$$

هذه المعادلة من الرتبة الثانية $o(h^2)$ عند كل نقطة داخلية وباستخدام الترميز التالي:

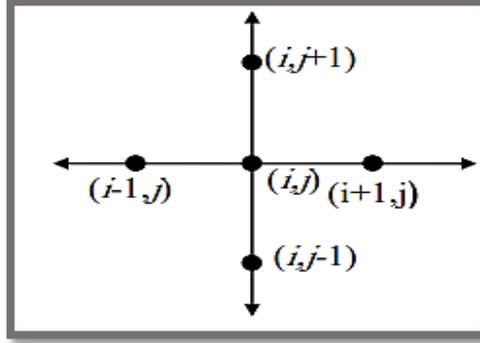
$$U_{i, j} = U(x, y), U_{i+1, j} = U(x+h, y), U_{i, j+1} = U(x, y+h), U_{i-1, j} = U(x-h, y)$$

$$U_{i, j-1} = U(x, y-h)$$

يمكن إعادة صياغة المعادلة السابقة كالتالي:

$$\frac{1}{h^2} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}) = g(x_i, y_j)$$

وعندما $g(x,y) = 0$ نتحصل على معادلة لابلاس.
انظر الشكل المرافق:



الشكل (3) يوضح الاستئسل للنقطة (i,j)

5. الشبكة الناعمة والشبكة الخشنة (Biazar et. all 2006)

• الشبكة الناعمة:

هي الشبكة الأصلية التي يتم فيها تقسيم المجال الى عدد كبير من الأجزاء الصغيرة والعقد.

• الشبكة الخشنة:

هي الجمع بين عدة عقد أو وحدات تخزين أو معاملات تحكّم من الشبكة الأصلية (الناعمة).

حيث كل عقدة في الشبكة الخشنة موجودة ضمن العقد في الشبكة الناعمة.

إذا كانت الشبكة الناعمة شبكة مربعة ذات خطوة صغيره h فإن الشبكة الخشنة تكون شبكة مربعة أكبر ذات خطوة $2h$.

6. لتنقل بين الشبكات (التقييد والإطالة) (الشقماني والتاجوري 2025)

في طرق متعددة الشبكات من الضروري نقل الحل المقرب والباقي والخطأ بين الشبكات، لهذا يوجد

نوعين من عوامل النقل بين الشبكات وهي:

• عامل التقييد (التمديد)

• عامل الإطالة

أولاً عامل التقييد (التمديد) (Restriction Operator)

عامل التقييد هو راسم من الشبكة الناعمة الى الشبكة الخشنة ويرمز له بالرمز R

$$R: \Omega_h \rightarrow \Omega_H$$

• عامل التقييد في بعدين:

لتكن u معرفة علي Ω_h (الشبكة الناعمة) و \bar{u} معرفة علي Ω_H (الشبكة الخشنة) فإن:

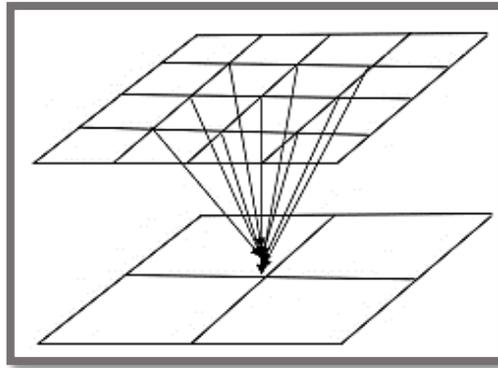
$$Ru = \bar{u}$$

عامل التقبيد في بعدين يأخذ الصيغة التالية:

$$\begin{aligned} \bar{u} = & \left(\frac{1}{16}\right) (u_{2i+1,2j+1} + u_{2i-1,2j+1} + u_{2i+1,2j-1} + u_{2i-1,2j-1}) \\ & + \left(\frac{1}{8}\right) (u_{2i+1,2j} + u_{2i,2j+1} + u_{2i,2j-1} + u_{2i-1,2j}) \\ & + \left(\frac{1}{4}\right) (u_{2i,2j}) \end{aligned}$$

ويكون الإستنسل المرتبط به على الشكل:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$



الشكل (4) يوضح مؤثر التمديد في بعدين

ثانياً مؤثر الإطالة (Interpolation Operator)

مؤثر الإطالة هو راسم من الشبكة الخشنة إلى الشبكة الناعمة ويرمز له بالرمز I

$$I: \Omega_H \rightarrow \Omega_h$$

• مؤثر الإطالة في بعدين

لتكن u معرفة علي Ω_h (الشبكة الناعمة) و \bar{u} معرفة علي Ω_H (الشبكة الخشنة) فإن: $I\bar{u} = u$

مؤثر الإطالة في بعدين يأخذ الصيغة التالية:

$$u_{2i,2j} = \bar{u}_{i,j}$$

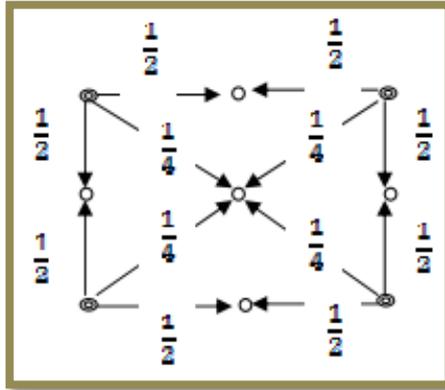
$$u_{2i+1,2j} = \frac{1}{2}(\bar{u}_{i-1,j} + \bar{u}_{i+1,j})$$

$$u_{2i,2j+1} = \frac{1}{2}(\bar{u}_{i,j-1} + \bar{u}_{i,j+1})$$

$$u_{2i+1,2j+1} = \frac{1}{4}(\bar{u}_{i+1,j+1} + \bar{u}_{i+1,j-1} + \bar{u}_{i-1,j+1} + \bar{u}_{i-1,j-1})$$

والإستئسل المرتبط به يكون كم يلي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$



الشكل (5)

يوضح مؤثر الإطالة في بعدين (•) نقاط الشبكة الخشنة (•) نقاط الشبكة الناعمة

من خلال ما سبق تكون العلاقة بين مؤثري الإطالة والتقيد في بعدين: $I=4 \times R^t$

7. طريقة الشبكتين (Two grid Method) (Biazar et all 2006)

تستخدم طريقة الشبكتين لحل النظام الخطي $A_h U_h = f_h$ الناتج من طريقة الفروق النهائية، وهي

تستخدم شبكتين لذا سميت بطريقة الشبكتين، وتمر بثلاث مراحل أساسية مرحلة ما قبل التنعيم، مرحلة

تصحيح الشبكة الخشنة ومرحلة ما بعد التنعيم، ولشرح هذه المراحل نتبع الخطوات التالية:

1. خطوات ما قبل التنعيم على الشبكة الناعمة (Pre smoothing) يتم استخدام طريقة من الطرق

التكرارية الأساسية بعدد تكرارات v_1 :

$$U_h^L = S(U_h^{L-1}, f_h); L = 1, 2, 3, \dots, v_1$$

2. تصحيح الشبكة الخشنة ويتم من خلال عدة خطوات وهي:

- حساب الباقي (Residual) من خلال الصيغة:

$$r_h = f_h - A_h U_h^{v_1}$$

- إيجاد قيمة r_H على الشبكة الخشنة من خلال ضرب r_h في عامل التقيد:

$$r_H = R r_h$$

- حل المشكلة على الشبكة الخشنة:

$$A_H e_H = r_H$$

حيث e_H مقدار الخطأ على الشبكة الخشنة.

- تصحيح الشبكة الخشنة من خلال:

$$U_h^{v_1+1} = U_h^{v_1} + I e_H$$

3. خطوات ما بعد التنعيم على الشبكة الناعمة (Post smoothing) نطبق طريقة جاوس سيدل

بعد تكرارات v_2 :

$$U_h^L = S(U_h^{L-1}, f_h); L = 1, 2, 3, \dots, v_2$$

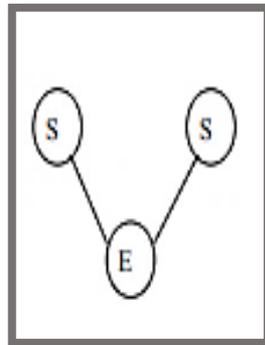
حيث إن:

A_h المصفوفة على الشبكة الناعمة

$A_H = R A_h I$ المصفوفة على الشبكة الخشنة

R المصفوفة من عامل التقيد

I المصفوفة من عامل الإطالة



الشكل (6)

يوضح طريقة شبكتين حيث S ترمز للتنعيم و E الحل الدقيق

8. تحليل التقارب لطريقة الشبكتين (Wesseling et all 1995)

الغرض من التحليل الثنائي الشبكة هو إظهار أن معدل تقارب طريقة الشبكة الثنائية مستقل عن حجم الشبكة h ، حيث هذا التقارب يعتمد على رقم التقليل $\|Q_2\|$ ويكون المعيار المستخدم هو المعيار الإقليدي، من أجل التبسيط نفرض أن $v_2 = 0$ في المعادلة التالية:

$$Q_2 = S_h^{v_2} [I - I_H^h A_H^{-1} R_h^H A_h] S_h^{v_1} \rightarrow (1)$$

حيث:

Q_2 هي مصفوفة التكرار لطريقة الشبكتين.

$S_h^{v_2}$ و $S_h^{v_1}$ تكونان مصفوفتان التكرار من الطرق التكرارية قبل وبعد عملية التنعيم.

I_H^h عامل الإطالة من الشبكة الخشنة الى الشبكة الناعمة.

A_H^{-1} معكوس المصفوفة المتحصل عليها من العلاقة $R_h^H A_h I_H^h$ على الشبكة الخشنة.

A_h المصفوفة المتحصل عليها من طريقة الفروق النهائية على الشبكة الناعمة.

عند وضع $v_2 = 0$ نتحصل على:

$$Q_2 = [I - I_H^h A_H^{-1} R_h^H A_h] S_h^{v_1} \rightarrow (2)$$

$$Q_2 = [A_h^{-1} - I_H^h A_H^{-1} R_h^H] (A_h S_h^{v_1}) \rightarrow (3)$$

لهذا فإن

$$\|Q_2\| \leq \|A_h^{-1} - I_H^h A_H^{-1} R_h^H\| \|A_h S_h^{v_1}\| \rightarrow (4)$$

ومن خلال العلاقة السابقة يتضح أن $\|Q_2\|$ تعتمد على $\|A_h^{-1} - I_H^h A_H^{-1} R_h^H\|$ و $\|A_h S_h^{v_1}\|$.

من خلال هذين العاملين نحتاج إلى دراسة التعريفات التالية.

تعريف 1 (Wesseling et all 1995)

خاصية التنعيم (Smoothing Property):

تمتلك S خاصية التنعيم إذا كان هناك ثابت C_s ودالة $\eta(v_1)$ غير معتمدين على h_k و $k=2,3,\dots,n$

بحيث إن:

$$\|A_k S_k^{v_1}\| \leq C_s h_k^{-2} \eta(v_1), \eta(v_1) \rightarrow 0 \forall v_1 \rightarrow \infty \rightarrow (5)$$

تعريف 2 (Wesseling et all 1995)

خاصية التقريب (Approximation Property):

خاصية التقريب تكون متحققة إذا كان هناك ثابت C_A مستقل h_k عن بحيث إن:

$$\|A_k^{-1} - I_{k-1}^k A_{k-1}^{-1} R_k^{k-1}\| \leq C_A h_k^2 \quad \rightarrow (6)$$

إذا تحققت هذه الخواص فإن من السهل إثبات أن تقارب طريقة الشبكتين غير معتمد على h .

نظريه 1 (Trottenberg et all 2000)

معدل التقارب لطريقة الشبكتين غير معتمد على h ، لنفرض أن خاصيتي التنعيم والتقريب متحققة فإن هناك عدد \tilde{v} غير معتمد على h بحيث إن:

$$\|Q_2\| \leq C_s C_A \eta(v_1) < 1 \quad \forall v_1 \geq \tilde{v} \quad \rightarrow (7)$$

البرهان

بما أن:

$$\|Q_2\| \leq \|A_h^{-1} - I_H^h A_H^{-1} R_h^H\| \|A_h S_h^{v_1}\|$$

ومن خلال خاصيتي التنعيم والتقريب في العلاقتين (5) و (6) ينتج أن:

$$\|Q_2\| \leq C_s h^{-2} \eta(v_1) C_A h^2, \quad v_1 \geq \tilde{v}$$

بحيث إن $\eta(v_1) \rightarrow 0$ عندما $v_1 \rightarrow \infty$ ، وبهذا ينتهي البرهان.

مثال 1

أوجد حل مسألة لابلاس التالية باستخدام طريقة الشبكتين

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u(0,y) = u(x,0) = 0$$

$$u(0.5,y) = 200y, u(x,0.5) = 200x$$

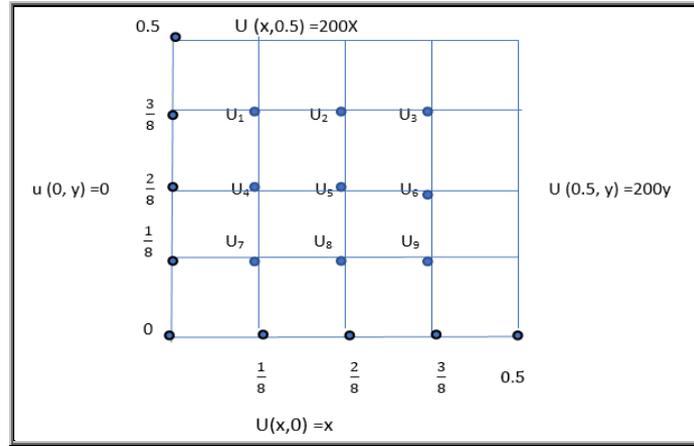
$$u(x,y) = 400xy^{[2]}$$

الحل

أولاً نستخدم طريقة الفروق النهائية لإيجاد منظومة من المعادلات الخطية وذلك بتطبيق مؤثر لابلاس

التفاضلي على النقاط الداخلية، ويتم ترقيم منطقة الحل من اليسار إلى اليمين ومن الأعلى إلى الأسفل

حسب $\Delta x = \Delta y = h = \frac{1}{8}$ كما هو موضح في الشكل (7):

الشكل (7) يوضح الشبكة الناعمة عندما $h=1/8$

$$4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} - u_{i-1,j} - u_{i,j-1} = 0$$

نتحصل على نظام المعادلات التالي:

$$\begin{aligned} 4u_1 - u_2 - u_4 &= 25 \\ -u_1 + 4u_2 - u_3 - u_5 &= 50 \\ -u_2 + 4u_3 - u_6 &= 150 \\ &\vdots \\ -u_6 - u_8 + 4u_9 &= 25 \end{aligned}$$

نظام المعادلات يمكن كتابته بالشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}_{9 \times 9} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 50 \\ 150 \\ \vdots \\ 25 \end{bmatrix}$$

في البداية نوجد عوامل التقيد والإطالة:

1. عامل التقيد (Restriction):

من المعادلة (2) في الفصل الثاني صيغة عامل التقيد في بعدين هي:

$$\begin{aligned} v_{i,j} &= \left(\frac{1}{16}\right)(u_{2i+1,2j+1} + u_{2i-1,2j+1} + u_{2i+1,2j-1} + u_{2i-1,2j-1}) \\ &\quad + \left(\frac{1}{8}\right)(u_{2i+1,2j} + u_{2i,2j+1} + u_{2i,2j-1} + u_{2i-1,2j}) + \left(\frac{1}{4}\right)u_{2i,2j} \end{aligned}$$

$$R = v_{1,1} = \left[\frac{1}{16} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \right]_{1 \times 9}$$

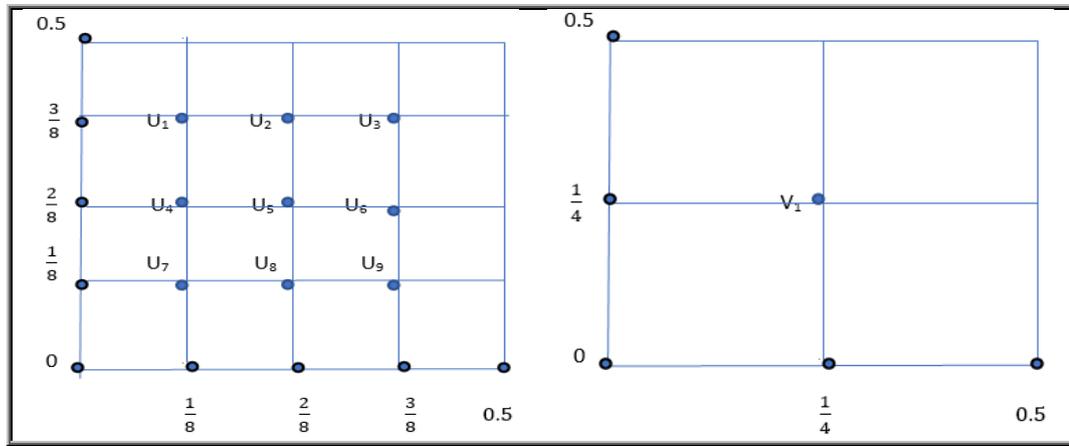
2. عامل الإطالة (Interpolation) الذي يرمز له بالرمز (I) يمكن الحصول عليه من خلال

العلاقة:

$$I=4*(R^t)$$

$$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^t_{1 \times 9}$$

أولاً نستخدم طريقة الشبكتين لتسريع تقارب طريقة جاوس سيدل للنظام الخطي السابق
يتم استخدام شبكتين للحل أحدهما خشنة عندما $2h = \frac{1}{4}$ والثانية ناعمة عندما $h = \frac{1}{8}$ كما موضح في الشكل
(8):



الشكل (8) يوضح الشبكة الناعمة و الشبكة الخشنة

1- إيجاد حل النظام باستخدام طريقة جاوس سيدل بعد عدد قليل من التكرارات فيكون الناتج:

$$u = \begin{bmatrix} 18.72787479 \\ 37.47787475 \\ 56.23893737 \\ \vdots \\ 12.48893737 \\ 18.74446869 \end{bmatrix}_{9 \times 1}$$

2- نوجد الباقي r_h على الشبكة الناعمة من الصيغة $r_h = b_h - A_h u_h$

$$r_h = \begin{bmatrix} 0.00008645 \\ 0.00006479 \\ 0.000021619 \\ \vdots \\ 0.000001081 \\ -0.00020000 \end{bmatrix}_{9 \times 1}$$

3- نقوم بإيجاد المصفوفة A_H من خلال العلاقة $A_H = R A_h I$

$$A_H = [0.75]_{1 \times 1}$$

4- ننقل الباقي من الشبكة الناعمة الى الشبكة الخشنة من خلال العلاقة $r_H = Rr_h$

$$r_H = [3.780999999614121e - 05]$$

5- أيجاد مقدار الخطأ e_H على الشبكة الخشنة من العلاقة $e_H = A_H^{-1}r_H$ حيث إن:

$$A_H^{-1} = [1.3333333333333333]$$

هذا يؤدي إلى أن:

$$e_H = [5.041333332818827e - 05]$$

6- ننقل الخطأ إلى الشبكة الناعمة عن طريق عامل الإطالة من خلال العلاقة $e_h = Ie_H$

$$e_h = \begin{bmatrix} 0.00001260 \\ 0.00025200 \\ 0.00012603 \\ \vdots \\ 0.00002520 \\ 0.00001260 \end{bmatrix}_{9 \times 1}$$

7- نصحح الشبكة الخشنة من خلال العلاقة $u_h = u + e_h$ ، حيث u_h يمثل الحل المبدئي لطريقة

جاوس سيدل

$$u_h = \begin{bmatrix} 18.74996938 \\ 37.49998199 \\ 56.24999099 \\ \vdots \\ 12.50000359 \\ 18.75000180 \end{bmatrix}_{9 \times 1}$$

الجدول التالي يوضح حل المسألة (1) باستخدام طريقة الشبكتين وتوضيح مدى تسريع التقارب

لطريقة جاوس سيدل

h=1/8					
X	y	الحل الفعلي	الحل بطريقة جاوس سيدل	الحل بطريقة الشبكتين	الخطأ المطلق الناتج من طريقة الشبكتين
1/8	3/8	18.75	18.75	18.75	0
1/8	2/8	12.50	12.50	12.50	0
2/8	2/8	25	25	25	0

2/8	1/8	12.50	12.50	12.50	0
3/8	1/8	8.75	8.75	8.75	0
عدد التكرارات		/	35	14	/

ثانيًا نستخدم طريقة الشبكتين لتسريع تقارب طريقة SOR لحل النظام الخطي الناتج.

في الخطوة السابقة تم استخدام طريقة الشبكتين في تقريب طريقة جاوس سيدل، وفي هذه الخطوة سوف

نستخدم طريقة الشبكتين لتقريب طريقة SOR على المثال (1) فكانت النتائج موضحة كما يلي:

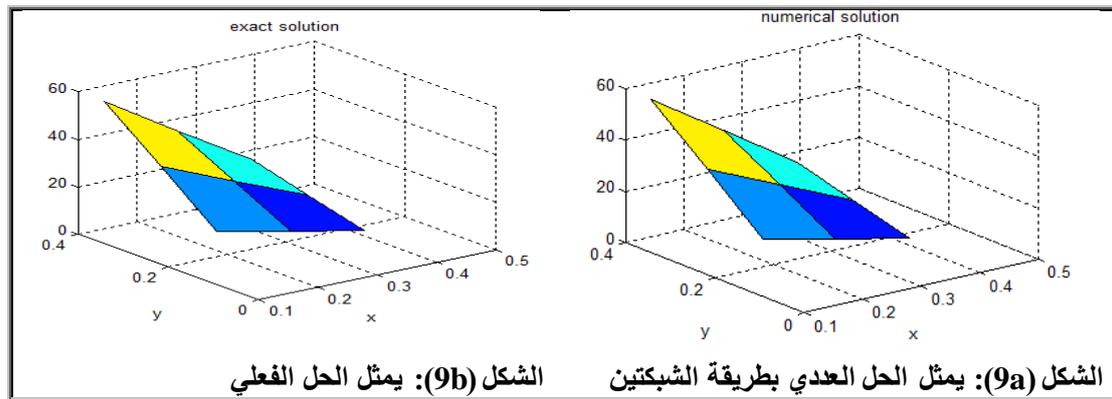
الجدول التالي يوضح حل المسألة (1) باستخدام طريقة الشبكتين وتوضيح مدى تسريع التقارب لطريقة

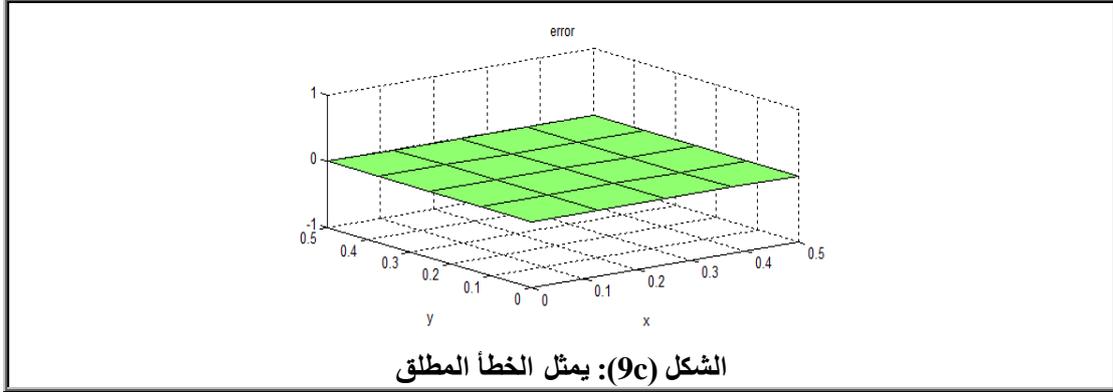
SOR

h=1/8					
X	Y	الحل الفعلي	الحل بطريقة SOR	الحل بطريقة الشبكتين	الخطأ المطلق الناتج من طريقة الشبكتين
1/8	3/8	18.75	18.75	18.75	0
1/8	2/8	12.50	12.50	12.50	0
2/8	2/8	25	25	25	0
2/8	1/8	12.50	12.50	12.50	0
3/8	1/8	8.75	8.75	8.75	0
عدد التكرارات		/	21	10	/

من الجداول السابقة نلاحظ أن الحل العددي طابق الحل الفعلي وأن طريقة الشبكتين قامت بتسريع تقارب

طريقة جاوس سيدل وطريقة SOR إلى نص عدد التكرارات تقريبًا.





مثال 2

أوجد حل مسألة بواسون التالية باستخدام طريقة الشبكتين

$$u_{xx} + u_{yy} = -2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

$$u(0, y) = u(x, 0) = 0$$

$$u(1, y) = u(x, 1) = 0$$

ثم قارن الحل مع الحل الفعلي لهذه المسألة $u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$

الحل

1- نستخدم طريقة الشبكتين لتسريع تقارب طريقة جاوس سيدل وطريقة SOR عندما $h=1/16$

أولاً نستخدم طريقة الفروق النهائية لإيجاد منظومة من المعادلات الخطية وذلك بتطبيق مؤثر لابلاس التفاضلي على النقاط الداخلية ويتم ترقيم منطقة الحل من اليسار إلى اليمين ومن الأعلى إلى الأسفل

حسب $\Delta x = \Delta y = h = \frac{1}{16}$ لتسريع تقارب طريقة جاوس سيدل.

الجدول التالي يوضح حل المسألة (3) باستخدام طريقة الشبكتين وتوضيح مدى تسريع التقارب لطريقة

جاوس سيدل

h=1/16					
X	y	الحل الفعلي	الحل بطريقة جاوس سيدل	الحل بطريقة الشبكتين	الخطأ المطلق الناتج من طريقة الشبكتين
1/4	3/4	0.5	0.50160945	0.50160945	1.61×10^{-3}
1/4	1/2	0.70710678	0.70938289	0.70938289	2.28×10^{-3}
1/2	1/2	1	1.00321891	1.00321891	3.22×10^{-3}
1/4	1/4	0.5	0.50160945	0.50160945	1.61×10^{-3}
1/2	1/4	0.70710678	0.70938289	0.70938289	2.28×10^{-3}
3/4	1/4	0.5	0.50160945	0.50160945	1.61×10^{-3}
عدد التكرارات	/	/	443	98	/

ثانياً نستخدم طريقة الشبكتين لتسريع تقارب طريقة SOR لحل النظام الخطي الناتج فكانت النتائج موضحة كما يلي:

الجدول التالي يوضح حل المسألة (2) باستخدام طريقة الشبكتين وتوضيح مدى تسريع التقارب لطريقة

SOR

h=1/16					
X	Y	الحل الفعلي	الحل بطريقة SOR	الحل بطريقة الشبكتين	الخطأ المطلق الناتج من طريقة الشبكتين
1/4	3/4	0.5	0.50160947	0.50160947	1.61×10^{-3}
1/4	1/2	0.70710678	0.70938291	0.70938291	2.28×10^{-3}
1/2	1/2	1	1.00321895	1.00321895	3.22×10^{-3}
1/4	1/4	0.5	0.50160947	0.50160947	1.61×10^{-3}
1/2	1/4	0.70710678	0.70938291	0.70938291	2.28×10^{-3}
3/4	1/4	0.5	0.50160947	0.50160947	1.61×10^{-3}
عدد التكرارات		/	237	51	/

2- نستخدم طريقة الشبكتين لتسريع تقارب طريقة جاوس سيدل وطريقة SOR عندما h=1/4

الجدول التالي يوضح حل المسألة (2) باستخدام طريقة الشبكتين وتوضيح مدى تسريع التقارب لطريقة جاوس سيدل:

h=1/4					
X	Y	الحل الفعلي	الحل بطريقة جاوس سيدل	الحل بطريقة الشبكتين	الخطأ المطلق الناتج من طريقة الشبكتين
1/4	3/4	0.5	0.52651464	0.52651464	2.65×10^{-2}
1/4	1/2	0.70710678	0.74460415	0.74460415	3.75×10^{-2}
1/2	1/2	1	1.05302929	1.05302929	5.30×10^{-2}
1/4	1/4	0.5	0.52651464	0.52651464	2.65×10^{-2}
1/2	1/4	0.70710678	0.74460415	0.74460415	3.75×10^{-2}
3/4	1/4	0.5	0.52651464	0.52651464	2.65×10^{-2}
عدد التكرارات		/	28	15	/

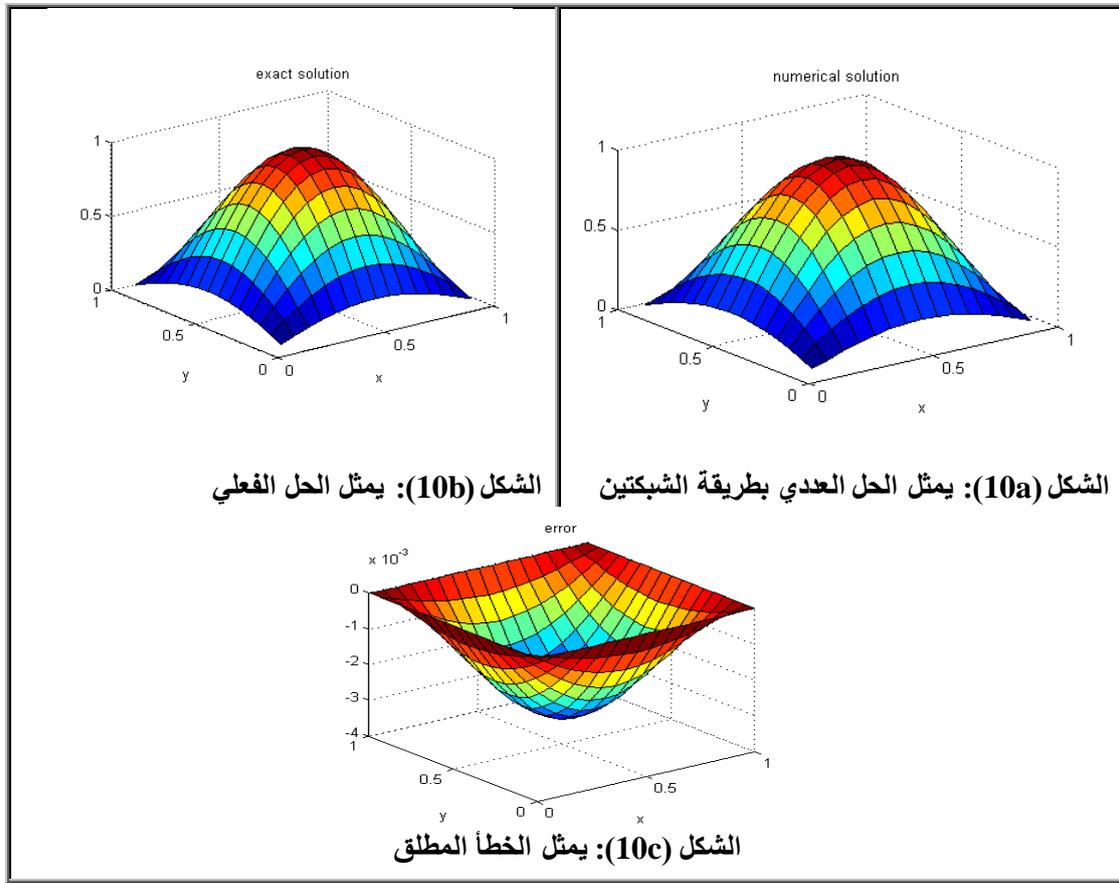
الجدول التالي يوضح حل المسألة (2) باستخدام طريقة الشبكتين وتوضيح مدى تسريع التقارب لطريقة

SOR

h=1/4					
X	Y	الحل الفعلي	الحل بطريقة SOR	الحل بطريقة الشبكتين	الخطأ المطلق الناتج من طريقة الشبكتين
1/4	3/4	0.5	0.52651464	0.52651464	2.65×10^{-2}
1/4	1/2	0.70710678	0.74460415	0.74460415	3.75×10^{-2}
1/2	1/2	1	1.05302929	1.05302929	5.30×10^{-2}

1/4	1/4	0.5	0.52651464	0.52651464	2.65×10^{-2}
1/2	1/4	0.70710678	0.74460415	0.74460415	3.75×10^{-2}
3/4	1/4	0.5	0.52651464	0.52651464	2.65×10^{-2}
عدد التكرارات	/	/	19	7	/

من الجداول السابقة يتضح أن طريقة الشبكتين قامت بتسريع تقارب طريقتي جاوس سيدل وSOR بشكل كبير عندما $h=1/16$ ، بينما عندما $h=1/4$ قامت بتسريع الطريقتين إلى نص عدد التكرارات تقريباً. وعليه نستنتج أنه كلما كانت قيمة h صغيرة تحصلنا علي دقة أفضل في الحل.



مثال 3

أوجد حل مسألة هيلمهولتز التالية مع شروط دير شليت باستخدام طريقة الشبكتين

$$u_{xx} + u_{yy} - 10u = -11y \sin x$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, \pi) = \pi \sin x$$

ثم قارن الحل الناتج مع الحل الفعلي لهذه المسألة

$$u(x, y) = y \sin x$$

الحل

أولاً نستخدم طريقة الفروق النهائية لإيجاد منظومة من المعادلات الخطية وذلك بتطبيق مؤثر لابلاس التفاضلي على النقاط الداخلية ويتم ترقيم منطقة الحل من اليسار إلى اليمين ومن الأعلى إلى الأسفل

$$\text{حسب } \Delta x = \Delta y = h = \frac{\pi}{32} \text{ لتسريع الحل لطريقة جاوس سيدل.}$$

الجدول التالي يوضح حل المسألة (3) باستخدام طريقة الشبكتين وتوضيح مدى تسريع التقارب لطريقة جاوس سيدل

h=π/32					
X	Y	الحل الفعلي	الحل بطريقة جاوس سيدل	الحل بطريقة الشبكتين	الخطأ المطلق الناتج من طريقة الشبكتين
π/16	7π/8	0.53628253	0.53630943	0.53630944	2.69 × 10 ⁻⁵
π/8	7π/8	1.05195602	1.05200879	1.05200881	5.27 × 10 ⁻⁵
π/4	3π/4	0.49797663	0.49800657	0.49800658	2.99 × 10 ⁻⁵
3π/4	3π/4	1.66608110	1.66609054	1.66609058	1.09 × 10 ⁻⁴
π/16	13π/16	1.66608110	1.66609054	1.66609058	1.09 × 10 ⁻⁴
π/8	5π/8	0.75139716	0.75139761	0.75139761	5.30 × 10 ⁻⁵
عدد التكرارات		/	253	88	/

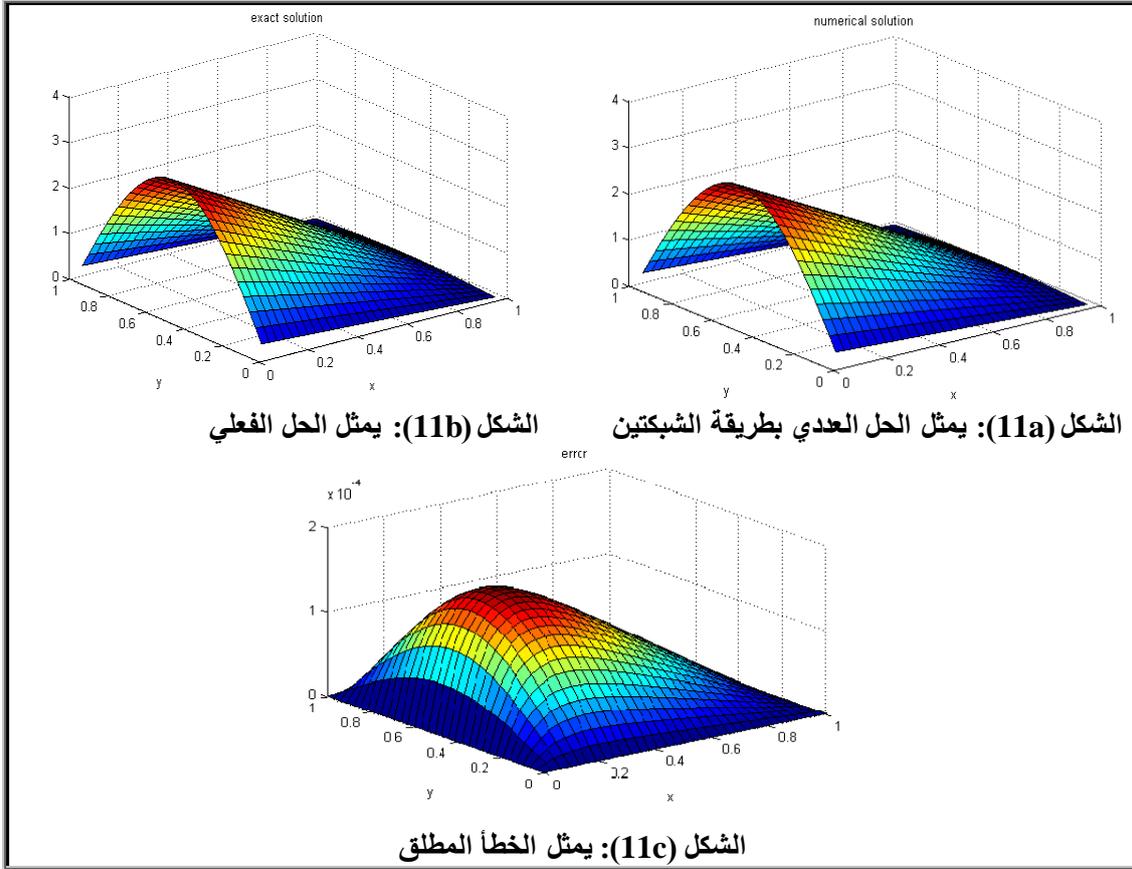
ثانياً نستخدم طريقة الشبكتين لتسريع تقارب طريقة SOR لحل النظام الخطي الناتج.

الجدول التالي يوضح حل المسألة (3) باستخدام طريقة الشبكتين وتوضيح مدى تسريع التقارب لطريقة

SOR

h=π/32					
X	Y	الحل الفعلي	الحل بطريقة SOR	الحل بطريقة الشبكتين	الخطأ المطلق الناتج من طريقة الشبكتين
π/16	7π/8	0.53638253	0.53630945	0.53630945	7.31 × 10 ⁻⁵
π/8	7π/8	1.05195602	1.05200882	1.05200882	5.27 × 10 ⁻⁵
π/4	3π/4	0.49797663	0.49800659	0.49800659	2.99 × 10 ⁻⁵
3π/4	3π/4	1.66608110	1.66609060	1.66609060	1.09 × 10 ⁻⁵
π/16	13π/16	1.66608110	1.66609060	1.66609060	1.09 × 10 ⁻⁵
π/8	5π/8	0.75139716	0.75139761	0.75139761	4.5 × 10 ⁻⁷
عدد التكرارات		/	172	30	/

من الجداول السابقة يتضح أن النتائج العددية بطريقة الشبكتين تطابق الحل الفعلي في ستة أرقام معنوية على الأكثر ورقمين معنويين على الأقل، حيث قامت طريقة الشبكتين على تسريع تقارب كلا من طريقتي جاوس سيدل وطريقة SOR إلى أقل من نص عدد التكرارات.



النتائج

هذه الورقة البحثية قدمت دراسة حول الحلول العددية لمسائل المعادلات التفاضلية الجزئية الإهليجية لمعادلة (لابلاس، بواسون، هليمهولتز) في بعدين نظرا لصعوبة إيجاد الحلول التحليلية لها، وذلك من خلال تطبيق طريقة الفروق النهائية على المجالات المنتظمة حيث تمتاز هذه الطريقة بسهولة تطبيقها ودقة نتائجها.

نستنتج من خلال الأمثلة أن النتائج العددية المتحصل عليها من تطبيق طريقة الشبكتين والطرق التكرارية الأساسية (جاوس سيدل، SOR) أن طريقة الشبكتين قد سرعت تقارب الطرق التكرارية إلى نص عدد التكرارات تقريبا، مقارنة باستخدام طريقتي جاوس سيدل وSOR بصورة مستقلة، مع الحفاظ على نفس مستوى الدقة في الحلول العددية.

بالنسبة لدقة الحل لطريقة الشبكتين تعتمد على قيمة h كلما كانت h صغيرة تحصلنا على دقة أفضل، بينما سرعة التقارب لهذه الطرق لا تعتمد على البعد بين النقاط (قيمة h) هذه الخاصية جعلت الطرق متعددة الشبكات مُسرّعا جيدا للطرق التقليدية، وقد تم الحصول على الحل العددي باستخدام برنامج MATLAB.

المصادر والمراجع

• المراجع العربية:

1. هب الريح، أحمد. (2009) *التحليل العددي - الجزء الثاني*، دار ومكتبة الشعب للنشر والتوزيع، مصراتة - ليبيا الطبعة الاولى.
2. الشقمانى، زينب، والتاجوري، سمية. (2025) "طريقة شبكة دورة-V لحل المعادلات التفاضلية الجزئية الناقصة"، *المجلة العلمية لكلية التربية جامعة مصراتة*، 12(01)، 287-315.

• المراجع الأجنبية:

1. Biazar, J., Gholamin, P., & Hosseini, K. (2006). "Exact solutions of Poisson equation by using variational iteration and Adomian decomposition methods" 11-19.
2. Brandt A. (1977) multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Mathematics of computation*;31(138):333-90.
3. Fulton Scott R., Paul E. Ciesielski, & Wayne H. S. (1986) "Multigrid methods for elliptic problems: A review." *Monthly Weather Review* 114.5: 943-959.
4. Hackbusch W. (1994) *Iterative solution of large sparse systems of equations*. New York: Springer.
5. Hackbusch W.& Trottenberg U. (2006) *Multigrid methods: proceedings of the conference held at Köln-Porz, November 23-27, 1981*. Vol. 960. Springer.
6. Stolk, C. C. (2025). A two-grid method with dispersion matching for finite-element Helmholtz problems. *Advances in Computational Mathematics*, 51, 43.
7. Trottenberg U., Cornelius W. Oosterlee, & A. Schuller. (2000) "Multigrid" Elsevier.
8. Wesseling, Pieter. (1995) *Introduction to multigrid methods*. No. NASA CR-195045.

9. Wang, J., Zhong, Z., Tian, Z., & Liu, Y. (2024). A two-grid algorithm of the finite element method for the two-dimensional time-dependent Schrödinger equation. *Mathematics*, 12(5), 726.
10. Zhang, H., & Chen, Y. (2023). Two-grid finite element method with an H2N2 interpolation for two-dimensional nonlinear fractional multi-term mixed sub-diffusion and diffusion wave equation. *AIMS Mathematics*, 9(1), 160–177.