الرياضيات في وادي الرافدين – النشأة والتطوّر (4000–300ق.م)

وريدة المنقوش[1]

كلية التربية–جامعة مصراتة

تاريخ التقديم: 14-12-2020 ، تاريخ القبول: 05-02- 2021، نشر إلكترونيا في 08-02-2021
https://doi.org/10.36602/faj/2021.n.17.04

ملخص البحث:

من المعروف تاريخياً أن وادي الرافدين يُعد موطن إحدى أعرق الحضارات في تاريخ البشرية؛ حيث ظهرت بدايات عديد العلوم والفنون والمعارف وتطوّرت بشكل تدريجي وهو أمرُ صاحب احتياجات السكان السياسية، والاقتصادية، والاجتماعية، والدينية وذلك بالتوازي مع تدرّجهم في سُلّم الحضارة. ويهدف هذا البحث إلى التركيز على أحد تلك العلوم ألا وهو علم الرياضيات للوقوف على التاريخ المفصّل لهذا العلم باستخدام المنهج السردي التاريخي؛ حيث سيتم تتبّع تاريخ نشأة علم الرياضيات وتطوّره عبر المراحل التاريخية لحضارة وادي الرافدين. ومن أهم النتائج التي تمخّض عنها البحث هي أن البشرية تدين لحضارة وادي الرافدين بابتكار مبدأ المرتبة العددية الذي تكمن أهميته في كونه يمثّل تقدماً في تجريد العدد من الارتباط بالأشياء المعدودة، وترتيب نظام العدّ على أساس العلاقة الموضعية بين مختلف الرموز ضمن العدد الواحد. هذا فضلاً عن وضعهم لأسس الجبر والهندسة وحساب المثلثات.

الكلمات المفتاحية: *وادي الرافدين، الرياضيات، الصفر، الجبر، الهندسة.*

[1] Oraida.ali@edu.misuratau.edu.ly

ISSN 2664-1682

Mathematics in Mesopotamia between origin and development (4000-300BC)

Wraida Ali Almangoush

Faculty of Education - Misurata University

Abstract

It is well known historically that Mesopotamia is the home of one of the most ancient civilizations in human history; where the influences of many sciences, arts, and knowledge appeared and gradually developed in line with political, economical, social, and religious needs of the population in parallel with their progression in the ladder of civilization. This research aims to focus on one of those sciences, namely mathematics, to find out the detailed history of this science using the historical narrative method. Whereby the history of the beginings and development of mathematics is traced through the historical stages of the Mesopotamian civilization. The most important results of the research were, that humanity owes to the Mesopotamian civilization the innovation of the principle of the numerical order, the importance of which lies in the fact that it represents progress in stripping the number from the association with the counted things and arranging the system of the count on bases of the positional relationship between the various symbols within a single number. In addition to that, their laying down of the foundations of algebra and geometry and trigonometry.

key words: *Mesopotamia, mathematics, Zero, algebra, geometry*.

1. المقدمة:

شهد وادي الرافدين منذ أواخر الألف الرابعة قبل الميلاد استقراراً حضارياً فيما سُمي بفجر عصر السُلالات السومرية الذي اقترن بظهور دويلات المدن السومرية والتي كان قوام كل منها مدينة رئيسية بمثابة العاصمة وعدد من المدن والقرى والأرياف التابعة لها، وكان

ISSN 2664-1682

للمعبد دور كبير بهذا العصر في النواحي الدينية والاقتصادية والسياسية والإدارية، ثم لم تلبث السلطة السياسية أن انفصلت عن السلطة الدينية، وظهر الحكام والملوك في شكل سُلالات حاكمة كسُلالة كيش، وسُلالة الوركاء، وسُلالة أور، وسُلالة لكش وغيرها، وقد شملت نهضة ذلك العصر مختلف الأنشطة اليومية من زراعة وعمارة وتجارة وصناعة، وكل ما يساعد على تسهيلها وتذليل ما يعترضها من عقبات وصعاب، وعليه بدأت تظهر ارهاصات علوم وفنون عدة مثل الرياضيات وهي موضوع هذا البحث.

2.1. مشكلة البحث:

وتدور حول نشأة علم الرياضيات وتطوره في وادي الرافدين من خلال طرح تساؤلات عدة ومحاولة إيجاد إجابات لها: كيف نشأت نُظم العدّ؟ ما هي الطرق التي تم اتّباعها لحلّ العمليات الحسابية؟ ماذا يعني النظام الموضعي؟ متى ظهر الصفر وكيف؟ ما هو مضمون النصوص الرياضية المكتشفة بالمناطق الأثرية في العراق الحديث؟ ما هو دور حضارة وادي الرافدين في ظهور الجبر والهندسة وتطورهما؟

3.1. أهمية البحث:

تكمن أهميتة البحث في أنه يسلّط الضوء على مراحل نشأة وتطوّر علم الرياضيات وفروعه، وهو يتناول ابتكار نُظم العدّ، وتنوّع العمليات الحسابية، والتوصّل إلى تحديد قيمة أي رقم وفقاً لمرتبته العددية، فضلاً عن اختراع الصفر ووضع أسس الجبر والهندسة.

4.1. فرضية البحث:

تفترض الباحثة أن علم الرياضيات قد نشأ بوادي الرافدين وتطوّر عبر آلاف السنين فيما يتعلّق بنُظم العدّ، وإجراء العمليات الحسابية، وابتكار النظام الموضعي والصفر، وأن رياضيي وادي الرافدين سبقوا غيرهم من الأمم بتقدمهم في مجالي الجبر والهندسة.

ISSN 2664-1682

5.1. أهداف البحث:

يهدف البحث إلى إبراز دور حضارة وادي الرافدين في وضع أسس علم الرياضيات من خلال ما حققته من تقدم وتطويرٍ للعمليات الحسابية، وتوثيقٍ للنصوص الرياضية، فضلاً عن اسهامها في نشأة وتطوّر الجبر والهندسة.

6.1. حدود البحث:

يتمثّل البعد المكاني للبحث في وادي الرافدين (العراق القديم)، أما البعد الزماني فيمتد ما بين عامي (4000-300ق.م).

2. المنهج:

المنهج المتّبع في هذا البحث هو المنهج السردي لسرد الأحداث التاريخية المتعلّقة بنشأة وتطوّر علم الرياضيات وفق تسلسلها الزمني، مع الاستعانة بالمنهج الوصفي أيضاً.

3. الرياضيات في وادي الرافدين

1.3. نُظم العدّ:

ترجع بدايات العدّ واستخدام الأعداد في وادي الرافدين إلى نحو (4000ق.م) حيث أُستخدمت كتل من الطين محفور فيها ثقوب أو تجاويف توضع فيها كرات صغيرة على هيئة حصى كروية أو مخروطية الشكل تتناسب مع سعة وشكل تلك التجاويف، وكل كرة كانت تمثّل عدداً محدداً يختلف عن الكرة الأخرى من حيث الشكل والحجم، وبعد نحو أكثر من (800) عام تم تطوير تلك الطريقة فتحوّلت الكتل الطينية إلى ألواح مسطحة، كما اختفى الحصى وأُستبدل بالكتابة المحفورة على الألواح (العاني، 2002، ج1، ص55).

ومع تزايد خبرة السومريين في التعامل مع الكميات المعدودة وحسابها استطاعوا شيئاً فشيئاً إعطاء رمز لكل رقم، الأمر الذي مكنهم في مرحلة تالية من تحويل العمليات

ISSN 2664-1682

الحسابية على كميات الأشياء إلى عمليات ذهنية على العدد نفسه بمعزل عن المعدود، وكانت الطرق التي تم بها هذا التحوّل عدة أهمها: الطريقة التصويرية، والطريقة الشفهية، والطريقة التسجيلية أو الكتابية، ومن أهم الأساليب التصويرية أو الحسية الوسائل المادية المختلفة لتمثيل العدد والتي منها: استخدام الحصى، والعظام، والخرز، وألواح الطين ذات الأشكال الهندسية المختلفة، واستخدام الأصابع ومختلف نقاط الجسم المميزة للعدّ وللدلالة على الأرقام. أما الطريقة الشفهية في تسمية الأرقام فهي تعتمد على إطلاق صفة أو اسم شيء حسي مميز للرقم على الرقم، وهذا يوضح جانباً هاماً من تاريخ تحوّل الشكل الرقمي إلى معنى مجرد، لا شك أن ترميز الرقم كتابة كان يعني تجريداً للشكل الكتابي وللمعنى الرقمي على حد سواء، ومع ذلك لابد من تمييز عدة مستويات للتجريد مرّ بها العدد عبر أشكاله الرقمية المختلفة؛ ذلك أن ترميز العدد لم يكن يعني بالضرورة فصله عن المعدود، وكانت الخطوة الأولى إلى التجريد هي تجاوز المقابلة بين المعدودات وأدوات العدّ كالحصى أو الأصابع إلى ترميزات شبه مستقلة عن الأشياء المعدودة، أما الخطوة الثانية والأصعب فكانت بناء منظومة عدّ يسهل التعامل فيها مع الأعداد الكبيرة، وهكذا ظهرت عدة منظومات غالباً ما ترجع في أساسها إلى أنماط العدّ البدائية التي كان يعتمدها الإنسان بأصابعه أو بأدوات عدّه البسيطة؛ فالنظام العشري في العدّ يرجع إلى العدّ على أصابع اليدين، وهناك نظام عدّ عشريني يرجع إلى العدّ على أصابع اليدين والقدمين معاً، وثمة أثر لنظام عدّ خمسي يرجع إلى العدّ على أصابع اليد الواحدة. لقد كانت الأرقام القديمة تُكتب بشكلها البدائي الذي يعتمد على تكرار الرمز لعدة مرات بحسب العدد المطلوب؛ مثال ذلك أن الرقم (8) كان يُكتب بتكرار رمز (1) ثمان مرات وهكذا (الخوري، 2002، ص ص40–41، 81).

ISSN 2664-1682

إن طرق التعبير عن الأرقام في وادي الرافدين مرّت بمراحل مختلفة عبر العصور؛ فقد استخدم الكتبة في العصور السومرية الأولى علامات عدة كانت تُطبع على الطين الطري، وكانت أشكال الطبعات على النحو التالي:

وذلك باستخدام نوعين من الأقلام؛ قلم رفيع وآخر سميك يتم تحريكه بوضعيات مختلفة لطبع الرقم المطلوب (الخوري، 2002، ص66).

لقد استطاع السومريون على امتداد الألف الثالثة قبل الميلاد إجراء عمليات معقدة بواسطة هذه الأرقام، ولكن يبدو أن تغيير شكل الأرقام صار أمراً ضرورياً لتطوير العمليات الحسابية، وهذا ما قام به السومريون بداية الألف الثانية قبل الميلاد حوالي؛ حيث ظهر نظام جديد لتدوين الأرقام بالتزامن مع ظهور الكتابة المسمارية (الخوري، 2002، ص70)، وتم الاستغناء عن أنواع الأقلام المستخدمة في طبع علامات الأرقام القديمة واستبدالها بشكل المسمار؛ فالمسمار العمودي ( ) يعبّر عن الرقم (1)، ويمكن تكراره ليعطي الأرقام من (1–9)، أما الرقم (10) فقد صار له شكل الزاوية ( )، وبتكراره حتى خمس مرات يعطي الأرقام من (10–50)، أما الحد الأعلى لاستخدام رمزي (1) و(10) معاً فهو الرقم (59) والذي يأتي بعده الرقم (60)، وله علامة الرقم (1) ذاتها، والذي يؤدي تكرارها إلى الحصول على قيمة عددية أكبر: 60–120–180...الخ (القطان، 2018، ص34). إن تطور أشكال الأرقام المسمارية السومرية استغرق فترة طويلة من الزمن فهي لم تحل محل الأرقام السومرية القديمة فور ابتكارها بل استمر التعامل بهما معاً لقرون عدة قبل أن تتلاشى الأرقام القديمة بشكل تدريجي بدليل أن بعض الألواح التي تعود

ISSN 2664-1682

إلى الألف الثانية قبل الميلاد ترد فيها أرقاماً سومرية قديمة جنباً إلى جنب مع أرقام مسمارية جديدة (الخوري، 2002، ص73).

لقد كان نظام العدّ المستخدم في العصور الأولى بوادي الرافدين مزيجاً من النظامين العشري والستيني، ولما كان تنوع الرموز العددية محدوداً بسبب طبيعة الخط المسماري فإن جميع الأعداد كانت تُمثّل من خلال رقمين فقط هما (1،10)، وقد تبيّن من النصوص الرياضية المكتشفة في بعض المواقع الأثرية أن استخدام كلا النظامين يعود إلى أواخر الألف الثالثة قبل الميلاد حيث بدأ السومريون بالنظام العشري ثم لم يلبثوا أن دمجوا النظام العشري ضمن النظام الستيني الذي يقوم على أساس الرقم (60) كما يقوم النظام العشري على أساس الرقم (10) (القطان، 2018، ص ص38-39).

إن اعتماد أساس لأي نظام عددي وليكن (5) على سبيل المثال يفترض أن تكون الوحدات الأساسية في هذا النظام: (1،5،5^2،5^3...) وهكذا، لقد كانت وحدات النظام الستيني الأساسية هي: (1،10،60،600،3600،36000)، وكانت هذه القاعدة تعتمد على تناوب الضرب بعددين هما (6،10)، ولعل دمج وحدتي (6 و10) يرجع إلى الحاجة للتبسيط؛ حيث لم يكن من السهل ابتكار تسميات لتسعة وخمسين رقماً قبل العدد (60)، ولكن بهذا التبسيط لن يكون صعباً إيجاد أسماء للأرقام العشرة الأولى وكذلك للوحدات الفرعية (20،30،40،50) الأمر الذي يترتّب عليه تسهيل العدّ، وإجراء العمليات الحسابية، وتدوين الأرقام (الخوري، 2002، ص ص66،68).

لقد كان للنظام الستيني أثر واضح في تطوير علم الرياضيات؛ حيث أنه يقلّل من صعوبة إجراء العمليات الحسابية، ويسهّل التعامل مع الكسور، ويظهر ذلك بوضوح عند مقارنة النظام الستيني بالنظام العشري؛ فالرقم (60) يقبل القسمة على الأعداد (2،3،4،5،6،10،15،20،30)، بينما الرقم (10) أساس النظام العشري لا يقبل

ISSN 2664-1682

القسمة إلا على عددين فقط هما (5،2) (ساكز، 1979، ص516)، كما أن النظام الستيني يتعامل مع الكسور بشكل أفضل مثال ذلك الكسر $(\frac{1}{3})$ يُعبّر عنه في النظام الستيني بعدد صحيح هو (20) أي (20) من (60)، في حين أنه في النظام العشري يُعد كسراً غير منتهي، وتكون قيمته بالناتج تقريبية وهي ما يعادل (3.33333) (القطان، 2018، ص ص41-42).

إن سبب اختيار السومريين للرقم (60) كأساس لنظام العدّ غير معروف حتى الآن الأمر الذي فتح المجال أمام الباحثين لطرح فرضياتهم حول الموضوع بإرجاع ذلك إلى أصول فلكية أو هندسية إلا أن افتراض وجود أصول فلكية وهندسية للنظام الستيني لا يبدو مقنعاً ذلك أنه لا يمكن لعلم الفلك أو الهندسة بشكل مستقل وضمن الظروف القديمة انتاج نظامٍ للعدّ، كما لا يمكن إثبات ارتباط النظام الستيني بعمليات القياس فهو لم يدخل المقاييس إلا لأنه كان موجوداً كنظامٍ للعدّ، ولكن ثمة من يفترض أن اللغة السومرية قد لعبت دوراً في نشأة النظام الستيني؛ ذلك أن السومريين قد أطلقوا على الأعداد من (1-10) التسميات التالية:

(جدول1) الأرقام السومرية

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
									
أو	إيليمو	إيسو	إيمين	آش	إيا	ليمو	إش	مين	أش
U	Ilmmu	Issu	imin	Ãš	Iya	limmu	Eš	Min	Aš

بتصرّف عن (الخوري، 2002، ص71)

إن التسميات الثلاث الأولى –أش، مين، إش– تشير إلى الأصول القديمة جداً لهذا العدّ الشفهي والسابق بلا شك لكافة أنماط التسجيل التالية للأرقام التي ابتكرها السومريين، أما التسميات الثلاث اللاحقة–ليمو، إيا، آش– فلا يوجد ما يربط بينها، كما أنها غير مشتقة

ISSN 2664-1682

من سابقاتها، ويلاحظ أن التسميات التي تأتي بعد الرقم (6 آش) هي تسميات مركبة أو مشتقة من سابقاتها؛ فالرقم (7 إيمين) مركب إيا ومين أي من (5+2)، والرقم (8 إيسو) مركب من إيا وإش أي (5+3)، والرقم (9 إيليمو) مركب من إيا وليمو أي (5+4)، ووسط هذه المجموعة يبرز الرقم (6 آش) عند المفترق ما بين الأرقام الثلاثة الأولى البسيطة، والثلاثة الأخرى المشّتقة والمركبة؛ فمعه ينتقل العدّ من أصابع اليد الأولى إلى أصابع اليد الثانية، ومعه أيضاً يبدأ العدّ بالمقارنة، لذلك لا يبدو أن اختيار السومريين له كان مجرد صدفة فهو الرقم الأكبر والأخير الذي يمكن تمييز وحداته وفق طريقة الكتابة البدائية بحسب مبدأ الجمع دون اللجوء إلى المقارنة أو العدّ إلا في أضيق الحدود (الخوري، 2002، ص ص 85-86، 89).

لقد ارتبط نظام العدّ السومري بتقسيمات الأوزان والمقاييس وكان كل منهما ينسجم مع الآخر بشكل تام لأنهما تطورا جنباً إلى جنب؛ حيث تجلّت عبقرية السومريين في استعمالهم كسوراً ستينية ونظاماً ستينياً للمقاييس، مع نظام ستيني للأعداد الصحيحة (سارتون، 1991، ج1، ص ص168-169.

2.3. العمليات الحسابية:

يبدو أن العمليات الأساسية (الجمع والطرح والضرب والقسمة) قد ظهرت بشكل تلقائي من واقع تعداد المجموعات وتقاسمها، وربما كانت عمليات العدّ الأولى تتم بواسطة أعداد صغيرة من الحصى أو عقد خيوط أو حفر علامات على العصي (سارتون، ج1، 1991، ص59)، ولا يُعرف بالضبط كيف كان سكان وادي الرافدين يجرون العمليات الحسابية البسيطة، ولعلهم كانوا يملكون نوعاً من ألواح العدّ غير أنه لا يوجد دليل أثري أو نصي على ذلك؛ فالنصوص التي ثم العثور عليها لا تتحدث عن هذا الأمر ربما باعتباره من

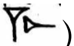
ISSN 2664-1682

البديهيات، وفيما يتعلّق بالحسابات الأشد تعقيداً فيبدو أنهم كانوا يكتبونها على ألواحٍ في شكل مسودات ثم يمسحونها ويعيدون استخدامها من جديد بحيث لم يتبق سوى ألواحٍ قليلة نادرة من هذا النوع بسبب طبيعتها المؤقتة (ملفيل، 2015، ص471). ويرجح أن عمليتي الجمع والطرح كانتا أول ما اهتدى إليه الإنسان في حضارات مختلفة وبصور مستقلة في حين يتمحور الإشكال حول عمليتي الضرب والقسمة وما إذا كان اختراعهما قد ارتبط بحضارة بعينها قبل انتشارهما (باقر، 1950، م6، ص18)

عرف السومريون عمليتي الجمع والطرح فعبروا حيناً عن جمع رقمٍ مع آخر بوضع (a-na) بين الرقمين، أما عند طرح رقمٍ من آخر فقد استخدموا الكلمة السومرية (lal) بين الرقمين، وبالرغم من وجود هاتين العلامتين أو الكلمتين لعمليتي الجمع والطرح إلا أن الكتبة غالباً ما كانوا يجرون تلك العمليات البسيطة ذهنياً ودون شرحٍ لها، كما استخدم السومريون الكلمة (a-ra) بين رقمين للدلالة على عملية الضرب، وفي هذا الجانب فقد تركوا العديد من جداول الضرب التي كانت تُستخدم كتمارين للتلاميذ (الراوي، 1958، ج2، ص ص301–302)، أما المشكلة التي واجهتهم فهي كيفية إجراء عملية القسمة، ويبدو أنهم وجدوا الحل في عدم إجرائها مطلقاً واستبدال ذلك بالضرب في معكوس العدد[1] (ملفيل، 2015، ص471)، مثال ذلك العملية التالية؛ (60÷3)، ويتم حلّها بالبحث عن معكوس (3) وهو (20)، وللقسمة على (3) كانت العملية تُستبدل بالضرب في (20) (سارتون، 1991، ج1، ص167).

(1) معكوس العدد هو الكمية التي إذا ضُرب بها العدد يكون الناتج (60)؛ لأن (60) هو أساس النظام الستيني، وعلى ذلك فإن معكوس أي عدد مضروباً بعدد ثان هو بمثابة تقسيم للعدد الثاني على العدد الأول (باقر، 1950، م6، ص ص13،24).

ISSN 2664-1682

وفي حوالي الفترة الممتدة ما بين (2370-2112ق.م) ظهر الأكديون وازدهرت دولتهم، وتبنّوا الحروف المسمارية في كتاباتهم، وتأثروا بثقافة السومريين واعتمدوا أرقامهم وضبطوها وفق نظامهم الخاص، وكانوا قد طوروا نظام عدّ عشري وعملوا على إدخال وحداته في نظام العدّ الستيني خاصة المائة والألف، وابتكروا رمزين خاصين بهما فكتبوهما بالرموز المسمارية على النحو التالي: رمز المائة () ولفظوه (مي–me)، ورمز الألف () ولفظوه (لي–إيم أو ليم lim) ويعني عشر مئات أو (10×100)، كما أطلقوا على الرقم (60 ) لفظ (شوشي šuššu) أو اختصاراً (شو šššu) وكانوا يكتبونه بالحروف لتلافي أي لبس بين الرقمين (1و60) لأنهما يُكتبان بالرمز ذاته. لقد حافظ النظام الستيني على مكانة مهمة في نظام العدّ لدى الأكديين لسهولة استخدامه في التدوين والحساب، فضلاً عن أن نظام العدّ العشري لم يكن قد اكتمل بعد فقد كان انتشاره مرتبطاً إلى حدٍ كبير بظهور النظام الموضعي[1] الذي أكسبه ميزاته الكتابية والحسابية (الخوري، 2002، ص ص117-118،120).لقد نقش الأكديون أرقامهم على الطين بالرسم المسماري السومري ذاته، ولكن مُسميات الأرقام لديهم اختلفت عن المسميات السومرية، للتوضيح انظر الجدول التالي:

(جدول2) الأرقام الأكدية

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
									
أشر	تش	سمان	سب	شش	خمش	أرب	شلاش	شنا	اشتين
Ešer	Tiše	Samãne	Sebe	Šeššu	hamiš	Erbe	Šalãš	šinã	Ištén

بتصرّف عن (القطان، 2018، 156)

(1) النظام الموضعي تعتمد فيه قيمة الرقم على موقعه بالنسبة للأرقام الأخرى (ساكز، 1979، ص517).

ISSN 2664-1682

3.3. النظام الموضعي والصفر:

شهد العصر البابلي القديم (1880–1595ق.م) نقلة نوعية في تطوّر علم الرياضيات وكان نقطة تحوّل مهمة؛ حيث توصّل البابليون خلاله إلى تحقيق إنجاز رياضي مهم ألا وهو النظام الموضعي، ليتواصل بعد ذلك التقدم خلال العصر البابلي الحديث(626–539ق.م)، أما الإنجاز الأهم للبابليين فهو ابتكار علامة للصفر، وقد تم ذلك حوالي عام (300ق.م) خلال العهد السلوقي (311–138ق.م) حيث استمر ازدهار العلوم ببابل بالرغم من خضوعها للمستعمرين الفرس والإغريق (باقر،2012،ج1، ص657).

لقد كان المبدأ الأساسي والوحيد في كتابة أي رقم هو مبدأ التكرار والجمع لدى أغلب الشعوب القديمة، وكانت الخطوة الحاسمة للتخلص من هذه المشكلة هي حذف تلك التكرارات الطويلة المربكة واستبدالها بعددها مع الحفاظ على ترتيبها بحيث يدل هذا العدد على قيمة الرقم المكرر في هذا الموضع من الترتيب، غير أن الصعوبة الأساسية كانت تتمثّل في تلك المسافة من العدد التي لا يمكن تمثيل رقم فيها بسبب عدم وجودها في العدد أصلاً، ومن هنا يُلاحظ الارتباط الوثيق بين ضرورة ظهور فكرة الصفر بالتوازي مع فكرة الخانات من أجل ملء الخانة الشاغرة أو تمييزها. إن انجاز البابليين تمثّل بخطوتين أساسيتين كان لابد أن تتما معاً؛ الأولى حذف الرموز المتكررة، والثانية إفساح مكان فارغ للخانة التي ليس لها رقم للدلالة على عدم وجوده، وبهذا ظهرت الخانات، وظهر العدّ الموضعي إضافة إلى أول تصوّر للصفر أو الخانة الفارغة (الخوري، 2002، ص ص124–125). إن أنظمة العدّ الموضعية تنطوي على قيمة رياضية وعلمية عالية؛ حيث يوجد بها حد أعلى وحد أدنى لما يتم تدوينه من أعداد (القطان، 2018، ص31)، وعلى سبيل المثال الأرقام (15،51) رمز الخمسة في الأول يعني (5)، وفي الثاني يعني (50)، وهو ما لم يكن معروفاً لدى

ISSN 2664-1682

الرومان على سبيل المثال ذلك أن الأرقام اللاتينية كانت تمثّل نظاماً لا يعتمد على المرتبة العددية لذا فإن رمز الرقم (5) وهو حرف (V) كان لا يعني إلا (5) فقط في أي موضع كان، ولمزيد من التوضيح فإن الرقم المسماري (𒐕𒌋) يختلف تماماً عن الرقم (𒌋𒐕) ذلك أن الرمز (𒐕) في الأول يعني (60)، وفي الثاني يعني (1) لذلك يُقرأ الرمـــــز (𒐕𒌋) (70)، والرمز (𒌋𒐕) (11) (ساكز، 1979، ص518). إن ما عُرف بنهج الوضع القائم؛ ويعني الاعتراف بأن رقماً واحداً يمكن أن يكون ذا قيم مختلفة حسب موضعه في العدد، يُعد إنجازاً مهماً سبق به البابليون الإغريق والرومان (دياكوف وكوفاليف، 2000، ص114).

أما الصفر فهو العلامة التي توضع بين الأرقام للدلالة على المرتبة الخالية، وهو في الوقت ذاته يغيّر مراتب الأرقام التي يقع بينها؛ فلكل رقم قيمتين قيمة ذاتية في نفسه، وقيمة لمرتبته بين الأرقام الأخرى، والصفر مفردة تعني لا شيء ولكن لا يمكن الاستغناء عنه ضمن النظام الحسابي بالرغم من انعدام قيمته العددية إذ يصعب من دونه التعرّف على الكميات والأعداد وترتيبها، وهو العدد الصحيح الموجب الذي يسبق العدد (1)، كما أنه عنصر محايد لا يغير من قيم الأعداد الصحيحة عندما يُجمع معها (القطان، 2018، ص ص50–51). ولما كان الصفر يعني الفراغ فإنه كذلك يعني لا نهاية عند إضافته مرات عدة إلى جانب عدد ما، وكل من الفراغ ولا نهاية مفهومان فلسفيان يصعب الإشارة إليهما برمز يفهمه عامة الناس. لقد كان الدافع وراء ظهور الأرقام قديماً دافعاً عملياً وليس له علاقة بالمفاهيم المجردة كما هو الحال اليوم فثمة بون شاسع بين المفهوم العددي لخمسة أشياء – على سبيل المثال–وبين المفهوم المجرد للرقم (5) في ذاته، وقد يتبادر إلى الذهن بأن اختراع الإنسان للأرقام الأساسية (1–10) كان مصحوباً باختراع الصفر رمزاً للفراغ وهذا غير

ISSN 2664-1682

صحيح، والحقيقة أن الإنسان قديماً توصّل إلى حلّ مسائل رياضية لمشكلات عملية عدة دون أن يكون بحاجة إلى رمزٍ يمثّل لا شيء أي صفر؛ فالصفر لم يكن ضرورياً بالنسبة له آنذاك، ولم يولّد غيابه أي مشكلة في إجراء العمليات الحسابية بدليل عدم ظهوره إلا متأخراً بعض الشيء في حضارة وادي الرافدين التي شهدت أول استخدام للصفر في التاريخ خلال العهد السلوقي وإن كان بمفهوم يختلف عن مفهومه اليوم، وقد كان ذلك بمثابة الخطوة الأولى التي مهّدت الطريق للوصول إلى هذا الرقم المهم (الصيادي، 2008، ص ص91-92، 94)، ولعل من الأسباب التي أدت إلى تأخر اختراع الصفر عن بقية الأرقام هو أن العديد من نظم الأرقام المبكرة لم تكن بحاجة إلى رمز يمثّل لا شيء؛ ذلك أنه من حيث الاستخدام نادراً ما يُستخدم مصطلح الصفر؛ ومثال ذلك أنه يُقال لا يوجد أوراق ولا يُقال يوجد صفر أوراق، لقد تجنّب البابليون إنهاء الأرقام بالأصفار مما يجعل من الصعب– على سبيل المثال– التفريق بين الأرقام (5و50و500)، لكنهم اعتمدوا على السياق لتحديد قيمتها. لم يكن الصفر البابلي يمثّل رقماً في حد ذاته وإنما مجرد شاغل للمكان (تلوك، 2015، ص ص586، 588).

إن العلامة المسمارية الدالة على الصفر كانت أول الأمر تُستخدم عند البابليين كعلامة للفصل بين الكلمات والجُمل، ثم صارت بعد ذلك تُستخدم لشغل الفراغ بين رقمين أو أكثر (باقر، 1955، ص336)، والغاية من ذلك إبعاد الشك في حال نسيان ترك فراغ واضح بين خانتين أو أن يكون الفراغ أقل مما يجب، وكانت تلك العلامة على أحد الشكلين التاليين () ومع ذلك فهي لم تحلّ مشكلة الخانة الفارغة نهائياً (الخوري، 2002، ص131).

ISSN 2664-1682

4.3. النصوص الرياضية:

إن النصوص والمؤلفات الرياضية المكتشفة في وادي الرافدين تنقســم إلى صنفين يتضمن الأول الجداول والإثباتات الرياضية (Tablet text)؛ كجداول الضرب، وجداول معكوس الأعداد، وجداول جذور الأعداد، بينما يتضمّن الثاني قضايا ومسائل رياضية (Problem text) وُضعت ليتم حلّها بموجب القواعد الرياضية. وتُعد الجداول أقدم عهداً من القضايا والمسائل، وتظهر فيها الصفة العملية، أما القضايا والمسائل الرياضية فهي أقرب إلى العلم النظري (باقر، 1955، ص333). ويلاحظ أن ثمة فرق كبير بين الجداول الرياضية والقضايا الرياضية وهو أن الجداول كانت مألوفة في مراكز التعليم بوادي الرافدين قديماً، كما أنها كانت أوسع انتشاراً خارج تلك المراكز، في حين أن القضايا الرياضية كانت تحتل مستويات أعلى في مراكز التعليم حيث يتم تداولها بشكل ضيق فيما بين المشتغلين بالرياضيات، ولعل في هذا ما يعلل وفرة ما عُثر عليه من ألواح الجداول الرياضية مقارنة بقلة ألواح القضايا والمسائل الرياضية (باقر، 1950، م6، ص19).

لقد برع رياضيو وادي الرافدين في تنظيم الجداول الرياضية سواءً تلك التي تخص الجذور التربيعية أو الجذور التكعيبية أو جداول مربعات الأعداد، وقد وصلت مثل تلك الجداول إلى أرقام كبيرة جداً يبدو أن الهدف منها هو سرعة إنجاز العمليات الرياضية (القطان، 2018، ص69)، لقد أسهمت تلك الجداول في تعميق الفكر الرياضي لرياضيي الرافدين، وتمكينهم من وضع مسائل هندسية وجبرية متنوعة (الراوي، 1985، ج2، ص310). من الصعب تحديد زمن معين لظهور النصوص الرياضية غير أن معظم نصوص الجداول تنتمي إلى العصر البابلي القديم؛ حيث عُثر بمدينة نيبور على حوالي (300) لوح تتضمّن جداول رياضية ومسائل حسابية وألواح مدرسية، أما في بابل فقد تم العثور على

ISSN 2664-1682

كثير من نصوص الجداول والمسائل الرياضية، ويلاحظ أن تلك الجداول مكّنت الرياضيين من توفير الجهد والوقت في الحساب والانصراف إلى القضايا الرياضية (توفيق، 2018، ص ص85–86).

إن وضع جداول لمعكوسات الأعداد الكبيرة، وتذييلها بملاحظات تم تسجيلها عبر مئات السنين كان أمراً بالغ الأهمية في تطوّر علم الفلك فيما بعد، وهنا تجدر الإشارة إلى أن (بطليموس الجغرافي Ptolemios the Geographer 100–175م)[1] تبنّى الرموز الستينية للكسور متجنّباً الاستخدام التقليدي للمصريين والإغريق لوحدات الكسور المختلفة؛ وذلك لأنها كانت أفضل كثيراً في الحسابات التفصيلية، ولعل هذا هو سبب استمرار بقاء النظام الستيني لقياس أجزاء الزمن بتقسيم الساعات إلى دقائق وثواني (ملفيل، 2015، ص476).

5.3. الجبر والهندسة:

الجبر في المفهوم الحديث هو فرع من الرياضيات يتناول تحديد قيمة مقادير مجهولة باستخدام علاقات رياضية، وقد كان البابليون أول من اهتم بمسائل الجبر (فرانشيشتي، 2015، ص560). وتُعد المسائل الجبرية تجريداً للعمليات الحسابية؛ حيث يتم استبدال الأعداد برموز تُدعى في الجبر متغيرات او عناصر لمجموعة ما وآنذاك تصبح عمليات الجمع والضرب مجرد أمثلة عن المؤثرات الجبرية والعمليات الجبرية الثنائية (القطان، 2018، ص74)، والجدير بالذكر أن الرياضيين في وادي الرافدين لم يستخدموا الرموز والإشارات الجبرية كما في الجبر الحديث، ولكنهم حلوا مسائلهم بالطرق الجبرية الخطابية؛ أي اقران

(1) بطليموس الجغرافي، فلكي وجغرافي وعالم رياضيات، أشهر مؤلفاته المجسطي (Almagest)، وهو عمل موسوعي يقع في ثلاثة عشر جزءاً حول حركة الشمس والقمر والكواكب، كما أن له ثمانية كتب في الجغرافيا والخرائط (Encyclopedia Britannica. 1979. Vol. viii. p. 279)

ISSN 2664-1682

المسائل الجبرية والهندسية بالمال والربح الذي ينتج عنه، أو الحقل وإمكانية تقسيمه إلى أشكال مختلفة...الخ وتمكنوا من حلّ المعادلات من الدرجة الأولى المحتوية على مجهول واحد أو عدة مجاهيل، ومعادلات أخرى من الدرجة الثانية والثالثة[1] وغيرها من المعادلات المشابهة أو المطابقة أحياناً لمسائل الجبر الحديث (الراوي، 1985، ج2، ص310)، وكانوا يتعاملون معها من خلال الجُمل والكلمات دون اللجوء إلى استخدام الرموز، وكان الوصول إلى النتيجة يتم من خلال قائمة من القواعد والعمليات التي يجب تطبيقها لحلّ تلك المعادلات (القطان، 2018، ص76)، ومع أن البابليين لم يستخدموا الرموز أو الحروف (أ،ب،ج)، أو (س،ص،ع) للدلالة على القيم المجهولة المطلوب إيجادها كما هو الحال في الوقت الحاضر إلا أنهم عمدوا إلى حلّ مسائلهم في قالب هندسي؛ فكانوا يتحدثون عن (ضلع) على أنه المجهول، و(مربع) كقوة مرفوعة إلى العدد (2)، وإذا كان هناك مجهولان فأنهما كانا يُسميان (طول وعرض)، وكان حاصل ضربهما هو (المساحة)، وإذا كان هناك ثلاثة مجاهيل فإنها تُسمى (طول وعرض وارتفاع)، وكان حاصل ضربها هو (الحجم)، ولعل هذه المصطلحات تشكل شاهداً على الارتباط الوثيق بين النظريات والمسائل العملية في الرياضيات (ماكليش، 2020، ص55). والجدير بالذكر أن استعمال الرموز الجبرية في العصر الحديث لم يُعرف قبل القرن السادس عشر الميلادي أي بعد اختراع البابليين للجبر بأكثر من ثلاثة آلاف عام تقريباً (سارتون، 1991، ج1، هامش 37، ص219). وبالرغم من أنهم لم يتركوا ما يفيد بالطرق التي اتّبعوها في حلّ المعادلات الجبرية إلا أن

(1) إن الفرق بين أنواع المعادلات الثلاثة يكمن في القوة التي يُرفع إليها المجهول في كل معادلة؛ فإذا كانت (س) فقط تكون المعادلة من الدرجة الأولى، وإذا كانت ($س^2$) تكون المعادلة من الدرجة الثانية، وإذا كانت ($س^3$) تكون المعادلة من الدرجة الثالثة (كراوثر، 1998، هامش (1)، ص60).

ISSN 2664-1682

الحلول الكثيرة الصحيحة والمتنوعة التي توصلوا إليها تؤكد أنهم كانوا على وعي وفهم بالطرق العامة لحلّ تلك المعادلات (كراوثر، 1998، ص28).

أما الهندسة فهي علم يبحث في خواص الخطوط والسطوح والزوايا وعلاقة بعضها ببعض، وتنقسم إلى: هندسة مستوية تختص بدراسة الأشكال التي لها بعدين فقط أي طول وعرض كالمربعات والمستطيلات، وهندسة فراغية تختص بدراسة الأشكال ذات الأبعاد الثلاثية أي طول وعرض وسمك مثل المكعّب والأسطوانة والمخروط والكرة ومتوازي المستطيلات، فضلاً عن دراسة مصطلحات النسبة الثابتة، وكيفية الحصول على المساحات والحجوم (القطان، 2018، ص ص74،80). لقد رسم الرياضيون في وادي الرافدين عديد الأشكال الهندسية كالمربع والمستطيل والمثلث قائم الزاوية والمتساوي الساقين وشبه المنحرف، واستطاعوا قياس حجم مجسمات كالأسطوانة ومتوازي المستطيلات والمخروط والهرم المقطوع والهرم الرباعي (سارتون، 1991، ج1، ص171).

لقد عرف رياضيو وادي الرافدين كيف يستخرجون حجوم بعض الأشكال المجسّمة بضرب مساحة القاعدة بالارتفاع؛ ومن ذلك إيجادهم لحجوم الأشكال المنشورية وأنواع الهرم، كما أوجدوا حجم المخروط المقطوع بضرب نصف الارتفاع في مجموع مساحتي القاعدتين السفلى والعليا، ويمكن تمثيّل القاعدة بالرموز التالية: إذا ما عُلم أن (ح) = حجم الهرم المقطوع، و(ع) = الارتفاع، و(أ ب) هو طول ضلع كل من القاعدتين المربعتين العليا والسفلى للهرم فإن القاعدة التي عرفوها كالآتي: $ح = ع \times \left(\frac{أ+ب}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{أ+ب}{2}\right)^2$ (الراوي، 1985، ج2، ص ص313–314)، كما أوجدوا الطرق الصحيحة لقياس بعض الأشكال واستعملوا في بعضها التقريب بالنسبة؛ ومن ذلك الدائرة وخواصها حيث عرفوا محيط الدائرة وعلاقته بالقُطر ثم مساحة الدائرة، واكتفوا من العلاقة بين محيط الدائرة

ISSN 2664-1682

وقطرها بعدد تقريبي هو (3)، وقد عُثر حديثاً في بعض الرُقم الطينية على قيمة أخرى لها هي $(\frac{25}{8})$؛ حيث اتبعوا قاعدة طريقة لمعرفة مساحة الدائرة وهي: المساحة = مربع المحيط مقسوماً على (12)، وتفسير هذه القاعدة في تلك النسبة الثابتة التي جعلوها (3) لأن مساحة الدائرة = نق^2 ×ط = $(\frac{2\text{ نق ط}}{4\text{ ط}})^2$ = $\frac{\text{م}^2}{12}$ (باقر، 1955، ص341).

ويبدو أن نظرية (فيثاغورس Pythagoras 580–500 ق.م)[1] وهي: أن مساحة المربعين المنشأين على ضلعي المثلث القائم الزاوية تساوي مساحة المربع المنشأ على الوتر كانت معروفةً لدى البابليين كحقيقة عملية، ولكن لا يوجد دليل على أنهم توصّلوا إلى إثبات هذه النظرية بالرغم من اكتشاف رقيم طيني بابلي يتضمّن أشكال هندسية ثمة من يفترض أن لها صلة ببرهان نظري للعلاقة بين مساحات ذات أشكال مختلفة (ساكز، 1979، ص521)، انظر هذا الرقيم البابلي في الشكل (1).

وثمة قضية رياضية كشفت عنها التنقيبات التي أُجريت في موقع تل حرمل (Tel Hermel)[2] عام 1949م، وهي ذات أهمية خاصة في تاريخ العلوم الرياضية تشير إلى معرفة بخواص المثلث القائم الزاوية، وبالمبدأ الهندسي المعروف بتشابه المثلثات، وتُعد هذه القضية حالة خاصة من حالات تشابه المثلثات الناشئة من انزال عمود من الزاوية القائمة في مثلث قائم الزاوية على وتره، فيكون المثلثان على جانبي العمود متشابهين ويشابه كل منهما المثلث الأصلي، وهذه الحالة هي إحدى النظريات الهندسية المعروفة المنسوبة إلى

(1) فيثاغورس، فيلسوف وعالم رياضيات يوناني، عُرف بنظريته الشهيرة نظرية فيثاغورس، كان مهتماً بالرياضيات والفلسفة والموسيقا (Encyclopedia Britannica. 1979. Vol. viii. p. 336)

(2) تل حرمل، (شادوبوم) يقع شرقي بغداد، وقد عُثر فيها على مجموعة كبيرة من الألواح تنوعت محتوياتها ما بين العقود والوثائق التجارية والقانونية، فضلاً عن الألواح الرياضية (باقر، 2012، ج1، ص453).

ISSN 2664-1682

(اقليدس Euclides 330-270ق.م)[1] والمستنتجة من نظرية فيثاغورس في خواص المثلث القائم الزاوية، ولكن تاريخ قضية تل حرمل يسبق زمن اقليدس بحوالي (1700) عام (باقر، 1955، ص ص343،345)، وقد رُسم في أعلى اللوح مثلث قائم الزاوية تم تقسيمه من الداخل إلى أربع مثلثات صغيرة كما في الشكل (2)، وكان الكاتب قد أعطى أبعاد المثلث، ومساحات المثلثات الأربعة الصغيرة، وتحت هذا الشكل الهندسي تم تدوين نص القضية وكيفية حلّها، ويمكن ايجاز حلّ المسألة بالمعادلة التالية:

$$\text{ب د} = \sqrt{\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ب ج}}} \times 2 \times \text{مساحة المثلث أ ب د}$$

وبالأرقام المعطاة ب د = $\sqrt{\frac{45}{60}} \times 2 \times 6 \times 8.6 = 27$

ح= $\text{ع} \times \left(\frac{\text{أ+ب}}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\text{أ−ب}}{2}\right)^2$ (الراوي، 1985، ج2، ص ص312-313).

وفي جانب آخر ابتكر البابليون نظاماً لعلم حساب المثلثات يُعد أكثر تطورا من النظريات الهندسية المعاصرة، وفي زمن سبق تأسيس علماء اليونان لعلم حساب المثلثات بأكثر من ألف عام، وقد ارتبط ذلك بلوح من الطين تم الكشف عنه أوائل القرن العشرين جنوبي العراق عُرف باسم (لوح بليمبتون Tablet Plimpton 322)[2]، وخلص الباحثون إلى أن البابليين توصلوا إلى أبعاد نظرية فيثاغورس قبل إثبات الفيلسوف اليوناني

(1) اقليدس، عالم الرياضيات الأكثر شهرة في العصور القديمة، أُشتهر بأبحاثه في مجال الهندسة والتي أهمها كتابه العناصر، (Encyclopedia Britannica, 1974. vol. III. p. 987)

(2) بليمبتون 322 لوح طيني يبلغ طوله حوالي (9سم)، وعرضه (13سم)، وسمكه (2سم)، اشتراه الصحفي الأمريكي جورج بليمبتون حوالي عام (1922) من تاجر آثار، وهو محفوظ حالياً بجامعة كولومبيا، ويحمل الرقم (322) في مجموعة (G A. Plimpton)، ويرجح أنه يرجع إلى الفترة ما بين (1822-1784ق.م)، وهو ينتظم في (4) أعمدة، و(15) صف، عن موقع: (https://ar. Wikipedia. Orgl/ wiki)

ISSN 2664-1682

لها، وأنهم وضعوا جدولاً حسابياً غير متعارف على طريقة تركيبه في العصر الحالي، ويبدو هذا الجدول أكثر تقدماً من نظريات حساب المثلثات الحديثة، وهو يمثل قياسات سلسلة من المثلثات قائمة الزاوية، ويُحتمل أنه كان يُستخدم في مسح الحقول وإجراء الحسابات الهندسية لبناء القصور والمعابد وغيرها، ولعل هذا الجدول ليس فقط أول جدول حساب مثلثات في التاريخ ولكنه أيضاً جدول حساب المثلثات الأكثر دقة حتى الآن (القطان، 2018، ص ص96-98)، انظر لوح بليمبتون في الشكل (3).

4. الخاتمة:

يتبين من خلال تتبع تاريخ الرياضيات بوادي الرافدين من حيث النشأة والتطوّر إن ابتكار الأرقام لتجسيد التمثيل اللفظي والرمزي للكميات أدى إلى تغيير حياة البشر؛ حيث تكمن أهمية اختراع الأرقام في أنها وفرت على الإنسان الكثير من الوقت والجهد، وفتحت الباب أمام تطوّر مختلف العلوم، كما أن تجسيد الأرقام في رموز محددة واختزال تكرارها شكّل تطوّراً في علم الرياضيات، وقد أدى تطوير نظام العدّ إلى تحفيز القدرات الذهنية للرياضيين بوادي الرافدين لإجراء المزيد من العمليات الأكثر تعقيداً وبالتالي يمكن القول بإن البشرية تدين لحضارة وادي الرافدين بابتكار مبدأ المرتبة العددية أو النظام الموضعي أي تحديد قيمة الأعداد بالنسبة لموقعها فيما إذا كانت من الآحاد أو العشرات أو المئات، وهذا ما أدى بدوره إلى تقدم في تجريد العدد من الارتباط بالأشياء المعدودة، وترتيب نظام العدّ على أساس العلاقة الموضعية بين مختلف الرموز ضمن العدد الواحد. ومن ناحية أخرى كان لرياضيي وادي الرافدين دور مهم في وضع أسس علمي الجبر والهندسة؛ حيث جاء ذلك من منطلق الحاجة إلى معالجة عديد المسائل في الحياة اليومية؛ من الحسابات التجارية إلى البناء، وتعيين الحدود، وتقسيم الحقول وغيرها، ولا شك أن ما تم تحقيقه بوادي الرافدين من

ISSN 2664-1682

تقدم في مجالي الجبر والهندسة كان بمثابة الأساس الذي انطلق منه رواد الرياضيات اليونان فيما بعد.

المراجع

أولا: المراجع العربية:

باقر، طه (1950). لوح رياضي على نظرية لأقليدس. *مجلة سومر*. 6، 5-28.

باقر، طه (1955). *مقدمة في تأريخ الحضارات القديمة*. ط2. دار المعلمين العالمية.

باقر، طه (2012). *مقدمة في تاريخ الحضارات القديمة*. ج2. دار الوراق.

توفيق، قيس حازم (2018). *العلوم والمعارف في حضارة وادي الرافدين ووادي النيل في العصور القديمة*. أشوربانيبال للثقافة.

تلوك، دافيد (2015). *نشأة الصف: العلم وأزمنته*. ج1. (ترجمة أيمن توفيق). المركز القومي للترجمة.

الخوري، موسى ديب (2002). *قصة الأرقام عبر حضارات الشرق*. وزارة الثقافة.

الراوي، فاروق ناصر (1985). *العلوم والمعارف*. حضارة العراق القديم. ج2. دار الحرية للطباعة.

سارتون، جورج (1991). *تاريخ العلم*. ج1.(ترجمة لفيف من العلماء). دار المعارف.

ساكز، هاري (1979). عظمة بابل. (ترجمة عامر سليمان). (د.ت).

سليمان، مصطفي محمود (1995). *تاريخ العلوم والتكنولوجيا في العصور القديمة الوسطى*. الهيئة المصرية العامة للكتاب.

الصيادي، أسامة زيد وهبة (2008). *تاريخ الأرقام عبر الحضارات*. دار الساقي.

ISSN 2664-1682

العاني، دحام إسماعيل (2002). موجز *تاريخ العلم*. ج1. مدينة الملك عبد العزيز.

فرانشيشتي، دونالد (2015). *تقدم علم الجبر*. العلم وأزمنته.ج1. (ترجمة أيمن توفيق). المركز القومي للترجمة.

القطان، شعيب فراس (2018). *مسائل رياضية في ضوء نصوص مسمارية منشورة وغير منشورة*. (رسالة ماجستير غير منشورة). جامعة بغداد.

كراوثر، ج.ج (1998). *قصة العلم*. (ترجمة يمنى طريف الخولي وبدوي عبد الفتاح). المجلس الأعلى للثقافة.

ماكليش، جون (1999). *العدد من الحضارات القديمة حتى عصر الكومبيوتر*. (ترجمة خضر الأحمد وموفق دعبول). عالم المعرفة.

ملفيل، دنكان ج (2015). *الرياضيات في بلاد الرافدين*. العلم وأزمنته. ج1. (ترجمة أيمن توفيق). المركز القومي للترجمة.

ثانيا: المراجع الإنجليزية:

Encyclopedia Britannica. (1979). Vol. viii. Index, the University of Chicago.

ثالثاً: المواقع الإلكترونية:

موقع بابل بوابة الآلهة https://www.facebook.com/babylon.gods.gate.015

https://ar. Wikipedia. Orgl/ wiki

ISSN 2664-1682

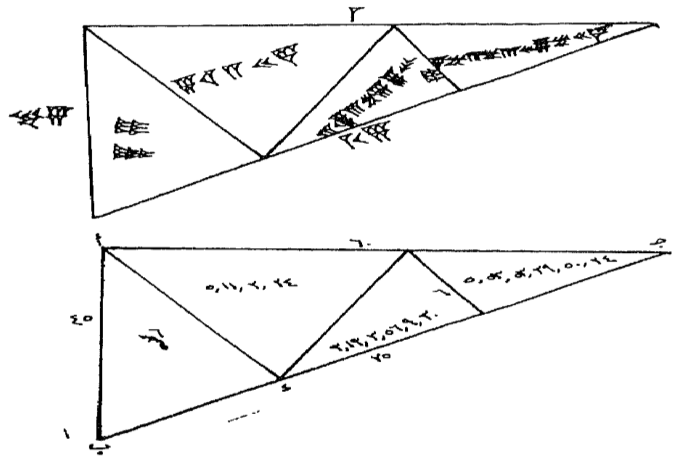
الملاحق

(شكل1) رقيم طيني بابلي يُحتمل أنه سبق نظرية فيثاغورس

(عن موقع بابل بوابة الآلهة)

(Babylon. Gods…‹ m. Facebook. Com)

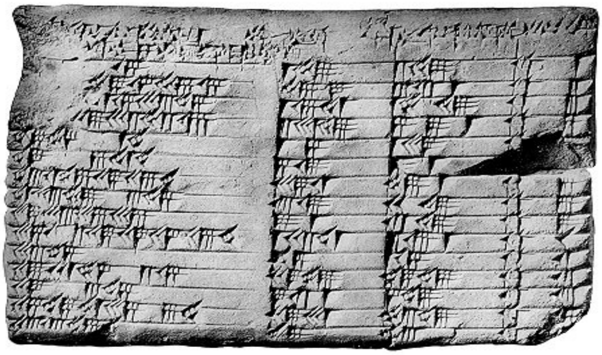
(شكل2) صورة اللوح الطيني المكتشف في تل حرمل فيما يتعلّق بتشابه المثلثات



(باقر، 1955، ص346)

ISSN 2664-1682

(شكل3) لوح بليمبتون 322



(عن موقع بابل بوابة الآلهة)

(Babylon. Gods…‹ m. Facebook. Com)

ISSN 2664-1682